TRANSITORIUM I

RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT

ELEKTROSTATIKA

Dr. G.J. HOOYMAN

januari 1973

REPRODUKTIE
FYSISCH LABORATORIUM

ELEKTROSTATIKA

Dr. G. J. HOOYMAN

januari 1973

I N H O U D

I. INLEIDING

§1 Inleiding en recapitulatie 1

II. DIPOLEN EN MULTIPOOL-ONTWIKKELING

§2 Het dipoolveld 4

§3 Dipool in een uitwendig veld 7

§4 Het veld van een begrensde ladingsverdeling; multipolen 9

III. ELEKTROSTATIKA VAN GELEIDERS IN VAKUUM

§5 Geleiders 12

§6 Influentieproblemen 15

§7 De beeldladingsmethode 18

§8 Kondensatoren 25

IV. DIËLEKTRIKA

§9 De diëlektrische konstante 28

§10 Polarisatie 30

§11 Veldbijdrage van een gepolariseerd medium 31

§12 Algemene vorm van de wet van Gauss 33

§13 Het verband tussen $\vec{P}$ en $\vec{E}$; de diëlektrische konstante 34

§14 Velden en grensvlakken 36

§15 Aanvullingen 37

LITERATUURLIJST 40

I. INLEIDING

§1 Inleiding en recapitulatie

De elektromagnetische verschijnselen en de wetten die de afzonderlijke verschijnselen beschrijven zijn in de loop van enkele eeuwen geleidelijk aan ontdekt, de namen Priestley, Coulomb, Gauss, Oersted, Ampère, Weber, Faraday zijn in dit verband indikatief. De fundamentele vergelijkingen waaraan het elektromagnetische veld voldoet zijn door Maxwell opgesteld. Alle eerder ontdekte wetten - behoudens materiaalvergelijkingen zoals de wet van Ohm - zijn in de Maxwell-vergelijkingen besloten. Bovendien kon Maxwell uit deze vergelijkingen een nieuw gegeven afleiden: de mogelijkheid van elektromagnetische golven, in het bijzonder van bijvoorbeeld lopende vlakke sinusgolven. Uit de afleiding volgde dat deze golven transversaal waren en uit experimentele gegevens bleek dat de voortplantingssnelheid in vakuum gelijk moest zijn aan de lichtsnelheid. Dit bracht Maxwell tot de elektromagnetische lichttheorie (1865) waarin licht geïdentificeerd wordt met elektromagnetische straling en wel met een zeer klein interval uit het gehele elektromagnetische spektrum. Daarmee kon de optika in beginsel uit het elektromagnetisme worden afgeleid, voor ponderabele media is dat voor het eerst door Lorentz met sukses gedaan.(De beste elektromagnetische behandeling van de optika geeft het boek van M. Born: Optik). Overigens heeft het nog tot 1888 geduurd voordat de door Maxwell voorspelde golven (anders dan licht, warmtestraling e.d.) ook in het laboratorium konden worden opgewekt door H. Hertz, waarmee de basis gelegd was voor radio, radar, mikrogolven etc.

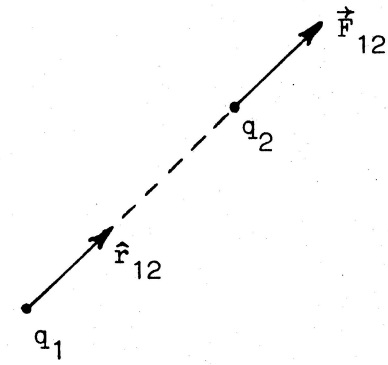
De bedoeling van dit kollege is, een systematische behandeling te geven van de eenvoudigste elektromagnetische verschijnselen, de begrippen en grootheden in te voeren die daarmee samenhangen en tenslotte de Maxwell-vergelijkingen te formuleren als gepostuleerde generalisaties van de meer beperkte en eenvoudiger wetten. De verdere uitbouw en toepassingen (Maxwell-theorie, stralingstheorie, elektromagnetische eigenschappen en struktuur der materie, golftheorie en optika, elektronika, elektrotechniek, etc.) vindt u in latere kolleges.

We herhalen enkele wetten en formules, die al behandeld zijn in het kollege "Wetten van Newton en Coulomb".

<u>Wet van Coulomb</u> voor de kracht tussen twee stilstaande puntladingen in vakuum:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (1)$$

$$\varepsilon_o \simeq 9.10^{-12}\ \text{F/m} \qquad \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \simeq 9.10^9\ \text{m/F}$$



<u>Wet van Gauss</u> in vakuum:

integrale vorm: $\varepsilon_o \oint_O \vec{E}\cdot d\vec{O} = Q_{omvat} = \iiint_V \rho dv$ (2)

differentiële vorm: $\text{div}\ \vec{E} = \rho/\varepsilon_o$ (3)

Veldlijnen van $\vec{E}$ eindigen of ontspringen in vakuum aan de lading.

<u>Konservativiteit</u> van het elektrostatische $\vec{E}$-veld:
4 ekwivalente formuleringen:

elke lijnintegraal $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r}$ is onafhankelijk van de weg van A naar B;

elke kringintegraal $\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$;

$\vec{E}$ bezit een potentiaal: $\vec{E} = -\ \text{grad}\ V$; (4)

$$\text{rot}\ \vec{E} = \vec{0} \qquad (5)$$

Gesloten veldlijnen van $\vec{E}$ komen dus in de statika niet voor.

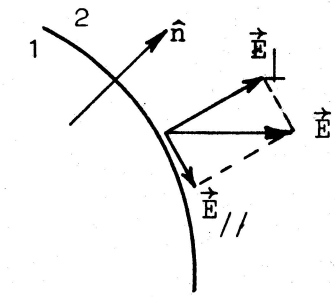
De omkering van (4) is

$$V(\vec{r}) = V(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} \qquad (6)$$

(2^e term: arbeid om eenheidslading tegen het veld in van $\vec{r}_o$ naar $\vec{r}$ te voeren)

Potentiaalveld van een puntlading in vakuum als V = 0 in het oneindige:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} \qquad (7)$$



<u>Kondities aan grensvlakken in vakuum</u>:

V kontinu en dus $\vec{E}_{//}$ kontinu

$$\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//} \quad \text{en} \quad \varepsilon_o(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\hat{n} = \sigma \qquad (8)$$

<u>Kracht op een oppervlakte-lading</u>:

per eenheid van oppervlak is de kracht

$$\vec{f} = \tfrac{1}{2}\sigma(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \qquad (9)$$

<u>Energie van een ladingsverdeling in vakuum</u>:

Bij een stelsel puntladingen is de wisselwerkingsenergie

$$W_{int} = \tfrac{1}{2}\sum_i q_i V'(\vec{r}_i) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_o}\sum_{i\neq j}\sum \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \qquad (10)$$

Energie van kontinue ruimte- en oppervlakteladingen

$$W = \tfrac{1}{2}\iiint \rho V dv + \tfrac{1}{2}\iint \sigma V dO = \iiint \tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2 dv \qquad (11)$$

Dichtheid van elektrostatische veldenergie in vakuum

$$w_{el} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_o E^2 \qquad (12)$$

<u>Potentiaaltheorie</u>:

Poisson-vergelijking $\quad \Delta V = -\rho/\varepsilon_o \qquad (13)$

Cartesisch: $\quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Centraal veld: $\quad \Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)$

Cilindersym. veld: $\quad \Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right)$

Een oplossing van de Poisson-vergelijking is in een gebied uniek bij gegeven waarden op de rand (Dirichlet) en op een additieve konstante na uniek bij gegeven waarden van $\partial V/\partial n$ op de rand (Neumann).

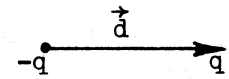
Laplace-vergelijking: $\Delta V = 0$ (14)

in ladingsvrije gebieden (V een harmonische funktie).

II. DIPOLEN EN MULTIPOOL-ONTWIKKELING

§2. Het dipoolveld

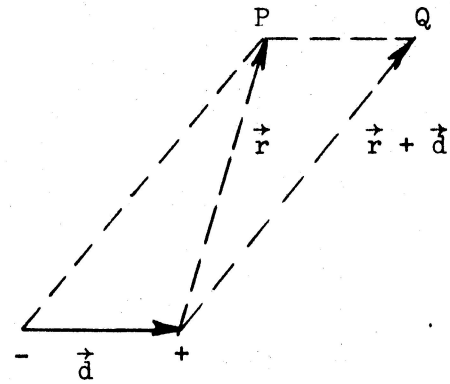
Het elektrisch veld van een neutraal molekuul zoals HCl zal op enige afstand weinig verschillen van het veld van een tweepool: een tweetal puntladingen q en -q op afstand d waarbij we de afstandsvektor $\vec{d}$ kiezen van de - naar de + lading. We kunnen immers verwachten dat voor dit molekuul het halter-model bruikbaar is: een H^+-ion en een Cl^--ion als puntladingen op vaste afstand d.



Het dipoolveld wordt nu eerst ingevoerd als benadering van het tweepoolveld op afstanden r, groot t.o.v. d; een benadering die des te beter wordt naarmate r groter is. Later zal de betekenis gegeneraliseerd worden. De dipoolbeschrijving zal o.a. van belang blijken bij het beschouwen van de wisselwerking tussen molekulen (waarvan de gemiddelde onderlinge afstand groot is vergeleken bij de afmetingen) en het gedrag van een medium in een uitwendig elektrisch veld.

We berekenen eerst het potentiaalveld van een tweepool in de bedoelde benadering. Met de oorsprong in de + lading en met V_+ en V_- als potentiaalvelden van + resp. - is de potentiaal in P:

$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) + V_-(\vec{r})$$



Nu geeft de - lading in P dezelfde potentiaal als de + lading in Q op het teken na dus

$V_-(\vec{r}) = - V_+(\vec{r} + \vec{d})$ en $V(\vec{r})$ is dus een differentie van de funktie V_+

$$V(\vec{r}) = V_+(\vec{r}) - V_+(\vec{r} + \vec{d})$$

Voor elke skalaire funktie ϕ is $d\phi = d\vec{r}\cdot\text{grad}\ \phi$ en wegens $d << r$ is de gezochte benadering

$$V(\vec{r}) = - \vec{d}\cdot\text{grad}\ V_+(\vec{r}) = \vec{d}\cdot\vec{E}_+(\vec{r}) = \frac{q\vec{d}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

(waarin $\hat{r}$ = eenheidsvektor in richting $\vec{r}$)

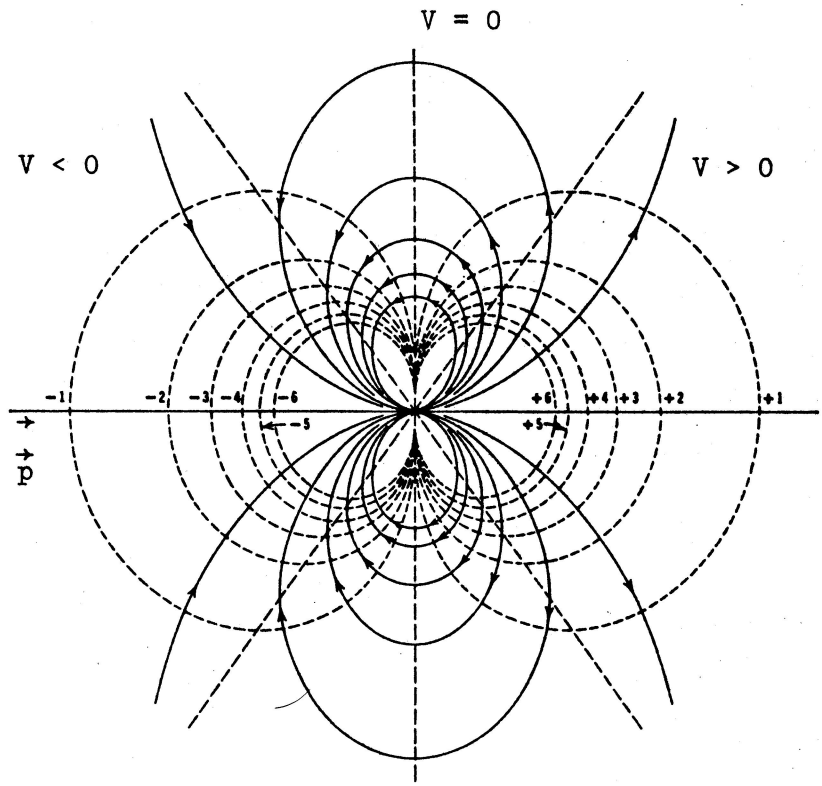
Definiëren we $\vec{p} = q\vec{d}$ als het <u>elektrische dipoolmoment</u> van de tweepool dan is dus de dipoolpotentiaal

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{4\pi\varepsilon_o r^2}} \qquad (15)$$

Eenheid van p is de Cm. In toepassingen wordt nog vaak de Debijeeenheid gebruikt: 1 debije = 10^{-18} e.s.e.cm wat overeenkomt met $(10/3).10^{-30}$Cm. Dit is de orde van grootte van molekulaire dipoolmomenten.

Omdat in V **alleen** het produkt van $\vec{q}$ en $\vec{d}$ voorkomt verandert het veld niet als $\vec{d} \to \vec{0}$ en $q \to \infty$ zodanig dat $q\vec{d}$ konstant = $\vec{p}$ blijft. We spreken dan van een infinitesimale tweepool of <u>mathematische dipool</u>, waarvan de potentiaal nog steeds door (15) gegeven wordt, maar nu zonder de restriktie $d << r$.

De ekwipotentiaalvlakken zijn uiteraard omwentelingsoppervlakken om de dipool-as, de veldlijnen liggen dus in vlakken door de dipool-as. In poolkoördinaten is de vergelijking van de ekwipotentiaalvlakken $r^{-2} \cos\theta$ = konstant (zie de figuur). Het middenloodvlak van de dipool is het vlak V = 0.



Veldlijnen (—) en ekwipotentialen (---) van een dipoolveld.

Het $\vec{E}$-veld volgt uit (15) wegens $\vec{E} = -\text{grad } V =$
$= -(4\pi\varepsilon_o)^{-1}\{(\vec{p}.\vec{r})\text{ grad } r^{-3} + r^{-3}\text{ grad }(\vec{p}.\vec{r})\}$ en omdat grad $r^{-3} =$
$= -3r^{-4}\hat{r}$ en grad $(\vec{p}.\vec{r}) = \vec{p}$ komt er

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o r^3}\{3(\vec{p}.\hat{r})\hat{r} - \vec{p}\}} \qquad (16)$$

Inderdaad ligt $\vec{E}$ in het vlak van $\vec{p}$ en $\vec{r}$. In het bijzonder is:

op dipool-as: $\quad V_{as} = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad \vec{E}_{as} = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_o r^3} \qquad (17)$

in middenloodvlak: $\quad V_m = 0 \qquad \vec{E}_m = -\dfrac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_o r^3} \qquad (18)$

In poolkoördinaten wordt (16) geschreven als

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_o r^3} \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^3} \qquad (19)$$

Ga in de figuur de loop van de veldlijnen na en het verband met de ekwipotentiaalvlakken.

Opgaven:

Langs elke rechte door de dipool (θ konstant) houdt $\vec{E}$ een vaste richting. Lees dat uit de formule af. In de figuur zijn twee rechten getekend waarlangs $\vec{E} \perp \vec{p}$. Bepaal de richtingen van de rechten.

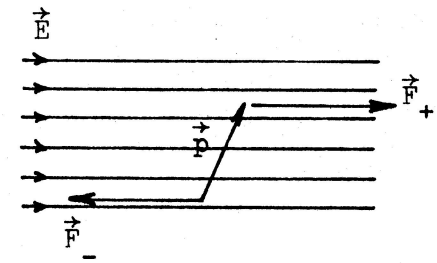
Welke symmetrie-eigenschappen heeft het dipoolveld? Verifieer de wet van Gauss voor dit veld.

Een dipool met moment $\vec{p}$ is geplaatst in een homogeen elektrisch veld $\vec{E}_o$ en $\vec{p} \,//\, \vec{E}_o$ (gelijk gericht). Leid af dat het somveld een bolvormig ekwipotentiaalvlak heeft en bepaal middelpunt en straal van de bol. Hoe groot is de potentiaal op die bol als V = 0 gekozen wordt in het middenloodvlak van de dipool?

§3. Dipool in een uitwendig veld

In een uitwendig veld $\vec{E}$ kan een vrije dipool een richtend koppel en bovendien een translatie-kracht ondervinden. We nemen aan dat het veld geen of een verwaarloosbaar kleine invloed op de grootte van $\vec{p}$ heeft.

Is het veld $\vec{E}$ homogeen dan is de netto kracht op een tweepool nul en er is alleen een koppel dat de tweepool in de veldrichting tracht te draaien, het koppelmoment $\vec{K}$ is $\vec{d} \times q\vec{E}$ of



$$\boxed{\vec{K} = \vec{p} \times \vec{E}} \qquad (20)$$

hetgeen uiteraard geldig blijft in de dipool-limiet.

Uit de potentiaal van het homogene $\vec{E}$-veld $V = -\vec{E}\cdot\vec{r} +$ konstante volgt direkt de potentiële energie van de tweepool in dat veld als $W = (-q)(-\vec{E}\cdot\vec{r}_o) + q\,\{-\vec{E}\cdot(\vec{r}_o + \vec{d})\} = -q\vec{d}\cdot\vec{E}$ of

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}} \qquad (21)$$

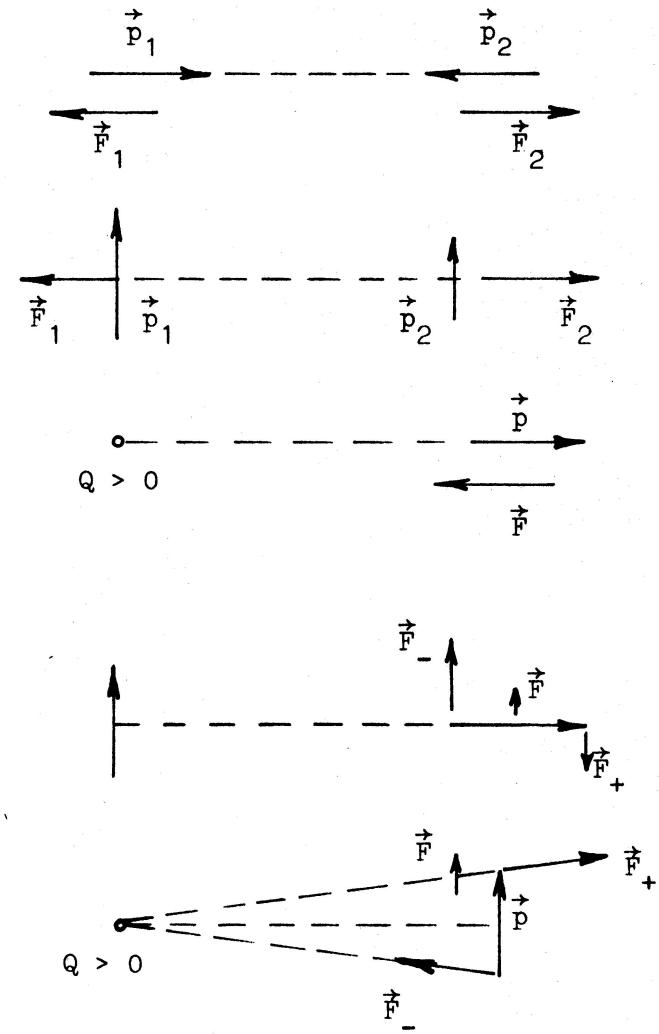
uiteraard minimaal als $\vec{p}$ "in het gelid staat".

Opgave:

Leid (21) ook af als potentiële energie van rotatie, zie Klassieke Mechanika, IV.B.3.

In een inhomogeen $\vec{E}$-veld kan naast een richtend koppel ook een translatie-kracht $\vec{F}$ resulteren omdat het $\vec{E}$-veld ter plaatse van + en - lading van de tweepool verschillend is.

In eenvoudige gevallen kan de richting van F snel bepaald worden uit de som van de krachten op + en - lading: zie de dipool-dipool-krachten in de getekende situaties of de aantrekking van een gerichte dipool in het veld van een puntlading. Een voorbeeld van het laatste geval is de aantrekking van een gericht dipool-molekuul door een ion (gehydrateerde ionen in een waterige oplossing!). Overigens behoeft de kracht tussen twee begrensde ladingssystemen niet altijd langs de verbindingslijn gericht te zijn: zie de getekende voorbeelden van de wisselwerking tussen twee dipolen en van de kracht op een dipool in het veld van een puntlading. Dit zijn dus voorbeelden van niet-centrale krachten.



Om de kracht op een dipool te berekenen kan men uitgaan van de kracht op een eindige tweepool en vervolgens de dipool-limiet nemen ($d \to 0$ en $q \to \infty$ met $p = qd$ = konstant). Algemener kan de kracht afgeleid worden uit de potentiële energie W van de dipool in het uitwendige veld $\vec{E}$. Ook in een inhomogeen wordt W in de dipool-limiet door (21) gegeven want $W = -qV(\vec{r}) + qV(\vec{r} + \vec{d})$ en voor infinitesimale $\vec{d}$ is $W = q\vec{d}\cdot\text{grad } V = -\vec{p}\cdot\vec{E}$.

Als $\vec{F}$ de kracht is, door het veld op $\vec{p}$ verricht, is de arbeid, nodig om $\vec{p}$ over een afstand $d\vec{r}$ te verplaatsen zonder zijn oriëntatie te wijzigen, gelijk aan $-\vec{F}\cdot d\vec{r}$, tevens gelijk aan dW. Anderzijds is W een skalaire funktie van de plaats, dus is ook $dW = (\text{grad } W)\cdot d\vec{r}$. Omdat dus $-\vec{F}\cdot d\vec{r} = (\text{grad } W)\cdot d\vec{r}$ voor elke $d\vec{r}$, is $\vec{F} = -\text{ grad } W$ en met (21) volgt

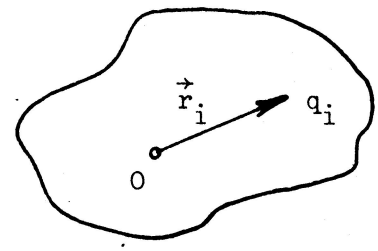
$$\boxed{\vec{F} = \text{grad } \vec{p}\cdot\vec{E}} \qquad (22)$$

Bij deze differentiatie moeten p en de oriëntatie van $\vec{p}$ konstant genomen worden. Bepaal zelf $\vec{F}$ in de hierboven getekende gevallen. Voor de kracht tussen twee parallele dipolen, beide loodrecht op hun verbindingslijn bijvoorbeeld weten we al dat $\vec{F}_2$ langs $\vec{r}$ gericht is zodat we W alleen langs de verbindingslijn hoeven te kennen:
$\vec{p}_2\cdot\vec{E} = -\, p_1p_2/4\pi\varepsilon_0 r^3$ en $F = -\,\partial W/\partial r = 3p_1p_2/4\pi\varepsilon_0 r^4$.

Het richtend <u>koppel</u> op een infinitesimale dipool heeft een moment $\vec{K}$ dat weer door (20) gegeven wordt. De grootte volgt bijvoorbeeld uit W met $K = |-\,\partial W/\partial\phi| = |-\,pE \sin\phi|$ als ϕ de hoek is tussen $\vec{p}$ en $\vec{E}$.

§4. Het veld van een begrensde ladingsverdeling; multipolen

We willen het veld van een willekeurige ladingsverdeling, die zich in een gebied van eindige afmetingen bevindt, beschrijven, met name op afstanden die groot zijn t.o.v. die afmetingen.



We beschouwen eerst het geval van n puntladingen q_i $(i = 1,\ldots,n)$ op afstanden $\vec{r}_i$ t.o.v. zekere oorsprong O. Het veld van q_i in $\vec{r}_i$ is hetzelfde als van puntlading q_i in O + het veld van een tweepool met $-q_i$ in O en q_i in $\vec{r}_i$ (dipoolmoment $\vec{p}_i = q_i\vec{r}_i$). Anders gezegd: als we het werkelijke veld vervangen door dat van een puntlading $Q = \sum_i q_i$ in O maken we een fout gelijk aan het somveld van n tweepolen. Op grote afstand r is die fout in V van de orde $1/r^2$ en dus klein t.o.v. het veld Q (orde 1/r).

Vervolgens gaan we die fout benaderen door het somveld van tweepolen te vervangen door het somveld van n dipolen $\vec{p}_i$ in O, dat is weer een dipoolveld van een dipool met moment $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$. Daarbij maken we weer een fout die voor grote r van orde $1/r^3$ is en dus klein t.o.v. het dipoolveld.

Deze suksessieve benadering is het begin van een reeksontwikkeling in 1/r

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha_o}{r} + \frac{\alpha_1}{r^2} f_1(\phi,\theta) + \frac{\alpha_2}{r^3} f_2(\phi,\theta) + \ldots. \qquad (23)$$

(de formele afleiding volgt in de kolleges Tensor-rekening en Maxwell-theorie).

De eerste term (monopoolterm) beschrijft de bijdrage van de netto <u>lading</u> van het systeem, daarna volgt de <u>dipoolterm</u>, enz. Op grote afstand r wordt het veld in goede benadering beschreven door de eerste, van nul verschillende term in de reeks: voor een ion de monopoolterm, voor een vrij, neutraal molekuul als HCl de dipoolterm,etc. We definiëren daarbij het dipoolmoment van het systeem t.o.v. de gekozen oorsprong O door

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r}_i \quad \text{of} \quad \vec{p} = \iiint \rho(\vec{R})\vec{R}dv(\vec{R}) \qquad (24)$$

(uitbreiding tot het geval van een kontinue ladingsverdeling).

Is Q = 0 dan is $\vec{p}$ onafhankelijk van de keuze van O (ga na dat $\vec{p}$ niet verandert door een translatie $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{a}$) en dus <u>het</u> dipoolmoment. Voor een tweepool is de oude definitie $\vec{p} = q\vec{d}$ in (24) besloten.

Opmerking: een neutraal systeem zoals HCl kan als tweepool gezien worden door in te voeren de zwaartepunten $\vec{R}_+$ van alle + lading en $\vec{R}_-$ van alle - lading

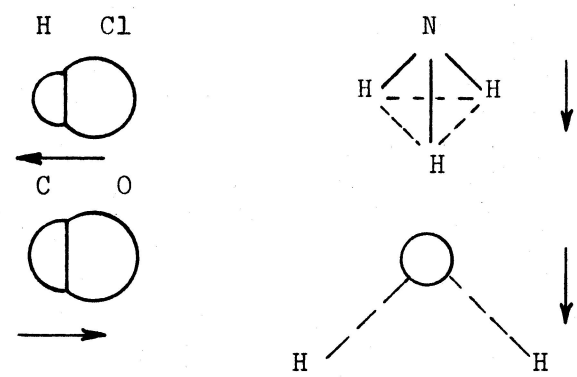
$$\vec{R}_+ = \sum_{q_j>0} q_j\vec{r}_j/q \qquad \text{en} \qquad \vec{R}_- = \sum_{q_k<0} q_k\vec{r}_k/(-q) \qquad (25)$$

waarin q de som van alle + lading is. Dan is $\vec{p} = \sum_j q_j\vec{r}_j + \sum_k q_k\vec{r}_k = q(\vec{R}_+ - \vec{R}_-) = q\vec{d}$, dat is het moment van een tweepool met +q en -q in de 2 zwaartepunten.

Is $Q \neq 0$ (een ion) dan is $\vec{p}$ mede afhankelijk van de keuze van O en $\vec{p}$ kan elke vektor zijn. Anderzijds bestaat nu het zwaartepunt $\vec{R}$ van de totale lading Q en het dipoolmoment t.o.v. dit punt is nul (ga na!). Kiezen we de oorsprong in het zwaartepunt dan is de 2^e term in (23) nul en de afwijking van de monopoolterm wordt in eerste benadering door de kwadrupoolterm ($V \sim 1/r^3$) bepaald.

In (23) is dus $\alpha_o = Q/4\pi\varepsilon_o$ en $\alpha_1 f_1 = p \cos\theta/4\pi\varepsilon_o$.

Neutrale molekulen als H_2, O_2, N_2, CH_4 en atomen van edele gassen hebben om symmetrie-redenen (welke?) in de vrije toestand geen dipoolmoment. Het CO_2-molekuul is lineair (axiale symmetrie) en heeft evenmin een dipoolmoment. HCl en NH_3 hebben wel een dipoolmoment waarvan de richting volgt uit de symmetrie. Andere molekulen met een zgn. permanent dipoolmoment zijn CO en H_2O.



N.B. Men kan zich afvragen of atomen en molekulen beschreven mogen worden als elektrostatische verdelingen van (punt)ladingen. Het blijkt echter dat de quantum-mechanika uiteindelijk tot dezelfde beschrijving leidt als deze eenvoudige klassieke modellen wat betreft de multipoolontwikkeling.

In een uitwendig veld $\vec{E}$ gedraagt een neutraal dipool-molekuul zich als een tweepool: richtend koppel, energie en kracht worden weer gegeven door (20), (21) en (22) als we aannemen dat $\vec{E}$ over het gebied van het molekuul niet al te sterk varieert. Overigens zal het moment $\vec{p}$ van het molekuul in principe door $\vec{E}$ een verandering ondergaan (deformatie van het molekuul) die echter doorgaans zeer klein is vergeleken bij het vrije dipoolmoment.

III. ELEKTROSTATIKA VAN GELEIDERS IN VAKUUM

§5. Geleiders

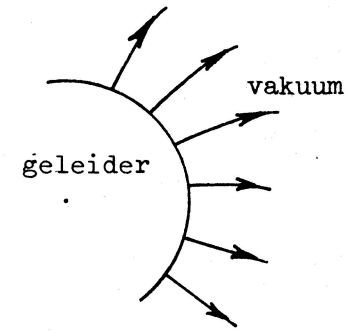
Onder de media die elektrische geleiding vertonen nemen de metalen een bijzondere plaats in. Hun groot geleidingsvermogen valt toe te schrijven aan de aanwezigheid van vrije elektronen die door het gehele kristalrooster kunnen bewegen.

De elektrostatika in vakuum kan niet zonder meer toegepast worden op het inwendige van een medium. De mikroskopische beschrijving als een dynamisch systeem van bijvoorbeeld geladen atoomkernen en elektronen in vakuum laat wel de invoering toe van een mikroskopisch elektrisch veld $\vec{e}$ dat echter naar plaats en tijd zeer sterk fluktueert. Het makroskopische veld $\vec{E}$ wordt dan in de zgn. elektronentheorie gedefinieerd als het gemiddelde $< \vec{e} >$ van $\vec{e}$ over een ruimtelijk gebied dat groot is t.o.v. de atomaire struktuur maar klein t.o.v. de makroskopische afmetingen van het medium en over een tijdsinterval dat groot is t.o.v. atomaire periodes maar klein is op makroskopische schaal. Het aldus gedefinieerde veld $\vec{E}$ is een kontinue funktie van plaats en tijd in het medium en de elektronentheorie leert dat dit veld $\vec{E}$ in de elektrostatika weer konservatief is, zoals we in het volgende voor metalen ook zullen zien.

De elektrostatika van metalen geleiders in vakuum berust op de volgende uitspraken:

a) <u>$\vec{E} = \vec{0}$ binnen de geleider</u>. Afwezigheid van makroskopische stromen betekent immers dat de gemiddelde kracht op de vrije elektronen nul is. Binnen een homogeen metaal waar alleen elektrostatische krachten kunnen optreden is dan $\vec{E} = \vec{0}$ ($\vec{E}$ is daar dus zeker konservatief).

b) <u>Buiten de geleider is $\vec{E}_{opp} \perp$ oppervlak</u> of ook: de veldlijnen eindigen of ontspringen loodrecht aan het oppervlak. In de grenslaag tussen geleider en vakuum zou een tangentiële komponent van $\vec{E}$ immers tot een stroom leiden.

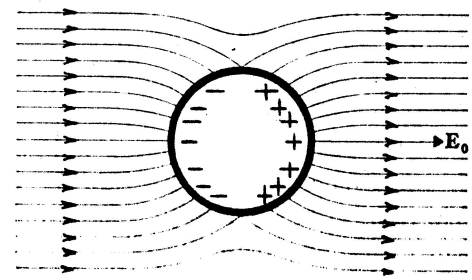


c) <u>Het oppervlak is een ekwipotentiaalvlak, het inwendige een gebied van konstante potentiaal</u>. Dit volgt direkt uit a) en b). Hierbij beschrijven we het oppervlak als een mathematisch oppervlak waar het E-veld diskontinu is (in feite is er een grenslaag). De potentiaal in het inwendige hoeft niet dezelfde waarde te hebben als aan het oppervlak. Integendeel: omdat er energie nodig is om vrije elektronen uit een metaal te laten ontsnappen (denk aan het foto-elektrisch effekt of aan thermische emissie) zal de potentiaal inwendig groter zijn dan aan de vakuumzijde van de grenslaag. Er bestaat dus een langs het geheele oppervlak konstante "potentiaalsprong" die zich echter in de elektrostatika nergens manifesteert en die we hier zonder bezwaar nul kunnen stellen.

d) <u>Alle lading van een geladen geleider bevindt zich aan het oppervlak, inwendig is $\rho = 0$</u>. We voeren dit hier als een empirisch gegeven in: ijsemmer-proef van Faraday en de proeven van Priestley, Cavendish, Maxwell en vooral die van Plimpton en Lawton (het is ook wel in overeenstemming met de wet van Gauss div $\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ maar de geldigheid daarvan in een medium is niet a priori gegeven).

De <u>verdeling</u> van de lading over het oppervlak wordt geheel bepaald door de voorwaarde dat $\vec{E}_{inw} = \vec{0}$. De berekening van de ladingsdichtheid σ bij gegeven totale lading en geometrische vorm van de geleider is maar in heel weinig gevallen mogelijk. Meestal moeten we met een benaderde oplossing genoegen nemen. Het geval van een bolvormige geleider is natuurlijk eenvoudig, een systeem van twee bollen (zelfs met gelijke lading en straal) leidt al tot een oplossing die alleen in de vorm van een reeks bekend is.

Een geleider, geplaatst in een uitwendig veld, vertoont <u>influentie</u>: dank zij de vrije elektronen ontstaat er een oppervlakteladingsverdeling σ zodanig dat weer $\vec{E}_{inw} = \vec{0}$. Het uitwendige veld wordt door de influentielading "afgeschermd". Bij het hierboven genoemde geval van twee geladen bollen moeten we dus ook met wederzijdse influentie rekening houden.

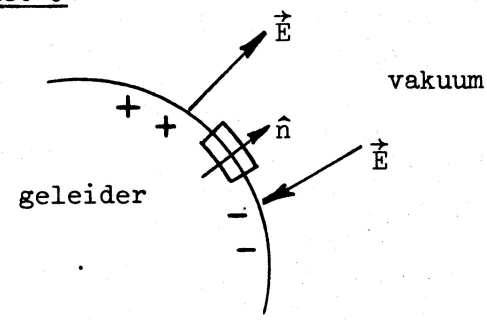


e) Uit het voorgaande volgt dat de <u>elektrostatika van metalen geleiders essentieel dezelfde is als in vakuum</u>: we kunnen de geleidende gebieden als vakuum denken mits we oppervlakte-lading aan de begrenzingen denken met de eis dat deze begrenzingen ekwipotentiaalvlakken zijn en dat binnen die begrenzingen $\vec{E} = \vec{0}$.

Dus geldt ook de wet van Gauss en het potentiaalveld voldoet aan de vergelijking van Poisson (13) of Laplace (14).

f) <u>Aan het oppervlak is de veldsterkte evenredig met σ</u>:

$$\vec{E}\cdot\hat{n} = \pm E = \sigma/\varepsilon_0 \qquad (26)$$



Dit volgt uit de toepassing van de wet van Gauss op een infinitesimaal "pillendoosje".

Voor een homogeen geladen bol, ∞ plat vlak of ∞ cilinder is (26) direkt te verifiëren.

Bij randwaarde-problemen in de potentiaaltheorie is $\partial V/\partial n$ langs een geleidend oppervlak dus evenredig met de ladingsdichtheid want $\vec{E}\cdot\hat{n} = -(\text{grad } V)\cdot\hat{n} = -\partial V/\partial n = \sigma/\varepsilon_0$.

g) <u>Aan het oppervlak van een geleider werkt een "negatieve druk"</u>: per eenheid van oppervlak is de kracht volgens (9) immers

$$\vec{f} = \tfrac{1}{2}\sigma\vec{E} \qquad (27)$$

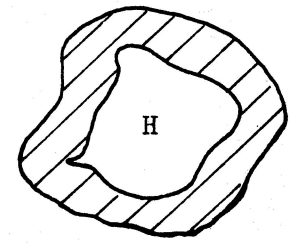
en deze $\vec{f}$ is altijd van het oppervlak naar buiten gericht. Met (12) en (26) is ook $\vec{f} = w\hat{n} = \tfrac{1}{2}\sigma^2\hat{n}/\varepsilon_0$.

h) <u>Energie van een geladen geleider</u>: uit (11) volgt

$$W = \tfrac{1}{2}QV \qquad (28)$$

i) <u>Een ladingsvrije holte in een geleider is veldvrij</u>:

uit de Laplace-vergelijking voor het gebied H en de uniciteitsstelling volgt direkt dat V in H konstant is, gelijk aan de potentiaal van de geleider. Dus is ook $\vec{E} = \vec{0}$. Dit is in overeenstemming met $\sigma = 0$ op het binnenoppervlak (ijsemmer-proef).



Elk elektrostatisch veld kan dus door een metalen doos worden afgeschermd (kooi van Faraday).

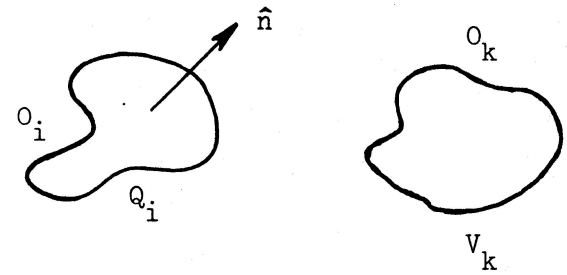
§6. <u>Influentieproblemen</u>

Als een ladingsverdeling in vakuum <u>gegeven</u> is kunnen de velden $\vec{E}$ en V daaruit berekend worden. Het is mogelijk dat daarbij ingewikkelde integralen optreden maar het antwoord is in beginsel bekend.

Bij geleiders is de situatie iets anders: gegeven is òf de totale lading van een geleider òf de potentiaal (bijvoorbeeld bij aarding) maar afgezien van enkele zeer eenvoudige gevallen is dan nog niet bekend hoe de lading zich over het oppervlak verdeelt. Die verdeling moet aan de eis voldoen dat alle geleidende oppervlakken ekwipotentiaalvlakken zijn of (wat op hetzelfde neerkomt, zie hieronder) dat $\vec{E} = \vec{0}$ binnen de geleiders. De vraag blijft: hoe wordt de ladingsverdeling en hoe worden de velden $\vec{E}$ en V buiten de geleiders? Als er buiten een geleider nog andere ladingen zijn is het influentie-verschijnsel in deze probleemstelling besloten.

Men kan dit probleem het best formuleren als <u>potentiaalprobleem</u>: in het gebied buiten de geleiders voldoet de funktie $V(\vec{r})$ aan de vergelijking van Poisson of Laplace en indien aan de begrenzingen van dit gebied (de geleidende oppervlakken en het oneindige) passende randvoorwaarden gegeven zijn leert de potentiaaltheorie dat er één en slechts één oplossing $V(\vec{r})$ is (cf. van der Blij en van Tiel: Infinitesimaalrekening, blz. 184 e.v.). In een aantal gevallen is die oplossing ook bekend, in andere gevallen is ze met numerieke methoden te vinden, eventueel met een rekenmachine. Uit de gevonden $V(\vec{r})$ volgt $\vec{E}(\vec{r})$ en uit de waarde van E op de geleidende oppervlakken volgt met (26) de ladingsdichtheid σ. Ook energieën en krachten kunnen dan berekend worden.

Ter illustratie volgt een schets van het bewijs van de <u>uniciteitsstelling</u> in het geval van een eindig aantal geleiders van eindige afmetingen. Van een aantal, genummerd met index i, is de lading Q_i gegeven, van de overige, genummerd met index k, de potentiaal V_k. Buiten de geleiders is er nog een ladingsverdeling ρ in een begrensd gebied. Puntladingen behoeven niet te worden uitgesloten maar vereisen wat meer wiskundige hulpmiddelen, we beschouwen ze gemakshalve als bolletjes met homogene ruimtelading. Zij G de ruimte buiten de geleiders, eventueel bestaande uit een eindig aantal gescheiden deelgebieden, die elk voor zich samenhangend zijn. De grenzen van G zijn de oppervlakken O_i en O_k en het oneindige Ω.



De potentiaal $V(\vec{r})$ moet in G voldoen aan Poisson

$$\Delta V = -\rho/\varepsilon_0 \tag{29}$$

en aan de randkondities

a) V = gegeven konstante V_k op elke O_k;

b) V is op elke O_i konstant en met $dO_i = \hat{n}dO_i$

$$\oint_{O_i} \frac{\partial V}{\partial n}\, dO_i = -\oint_{O_i} \vec{E}\cdot d\vec{O}_i = -\oint_{O_i} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\, dO_i = -Q_i/\varepsilon_0 \tag{30}$$

met gegeven Q_i;

c) voor $r \to \infty$ moet $V \to 0$ minstens als r^{-1}.

Stel dat dit probleem twee oplossingen V_1 en V_2 had dan zou de verschilfunktie $U = V_1 - V_2$ in G aan de Laplace-vergelijking voldoen (harmonisch zijn), op elke O_k nul zijn, in Ω minstens als r^{-1} nul worden terwijl wegens (30) op elke O_i

$$\oint_{O_i} \frac{\partial U}{\partial n}\, dO_i = 0 \tag{31}$$

We beschouwen dan de integraal I over alle grenzen van G

$$I = \oiint_{O} U \text{ grad } U \cdot d\vec{O} = - \oiint_{\substack{\text{alle} \\ O_i}} U \frac{\partial U}{\partial n} dO_i - \oiint_{\substack{\text{alle} \\ O_k}} U \frac{\partial U}{\partial n} dO_k + \oiint_{\Omega} U \frac{\partial U}{\partial n} d\Omega$$

(twee - tekens omdat de <u>uit</u> G wijzende normaal - $\hat{n}$ is langs O_i en O_k).

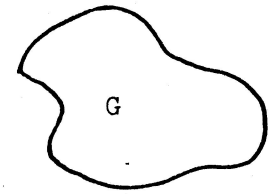
I = nul: langs O_i is U een konstante en dus is de 1^e integraal wegens (31) nul, langs O_k is U zelf nul, in Ω wordt de integraal and minstens als r^{-3} nul voor $r \to \infty$ en door de integraal te zien als limiet van de integraal over een bol met straal R waarbij $R \to \infty$ kunt u direkt afleiden dat ook deze bijdrage nul is.

Anderzijds is volgens het Gauss-theorema ook

$$I = \iiint_G \text{div } (U \text{ grad } U) dv = \iiint_G U \Delta U dv + \iiint_G (\text{grad } U)^2 dv$$

Hierin is de 1e term rechts nul (U is harmonisch) en dus wegens I = 0 ook de 2e term. Maar de integrand daarin is niet-negatief en dus overal in G nul. Dus moet grad U = 0 overal in G en U moet konstant zijn. Is de verzameling van de O_k niet leeg (minstens één geleider heeft een gegeven potentiaal) dan is op minstens één geleider U = 0 en dus is U = 0 overal in G of $V_1 = V_2$. Zo niet dan zouden V_1 en V_2 een konstante kunnen verschillen die echter = 0 wordt zodra we eisen dat potentialen in het oneindige nul worden.

Hiermee is de <u>uniciteitsstelling</u> voor dit (gemengde) randvoorwaardenprobleem bewezen: bij de gegeven specificaties (van elke geleider òf de totale lading òf de potentiaal) heeft de Poisson-vergelijking in G slechts één oplossing die $\to 0$ in het oneindige.



Als voorbeeld van toepassing bewijzen we de uitspraak "wat op hetzelfde neerkomt" in de 2^e alinea van §6 d.w.z.: is V konstant langs een gesloten oppervlak dat een ladingsvrij gebied G omvat dan is $\vec{E} = \vec{0}$ in G.

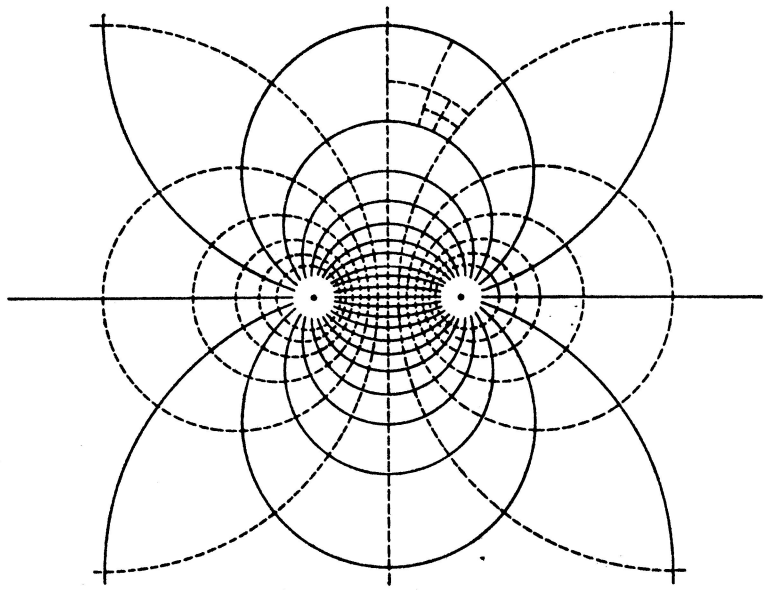
Immers: in G voldoet V aan de Laplace-vergelijking, is een harmonische funktie, terwijl V op de rand gegeven is, nl. konstant = V_o. (Dirichlet-probleem).

Dit probleem heeft slechts één oplossing. Maar de funktie $V = V_o$ in G <u>is</u> harmonisch in G en voldoet aan de rand, is dus de gezochte oplossing. Dus is $\vec{E} = \vec{0}$ in G.

§7. De beeldladingsmethode

In sommige eenvoudige gevallen kan het potentiaalprobleem met een truc worden opgelost: men gaat uit van een reeds opgelost probleem en leidt daaruit de oplossing af van een ander probleem door "de grenzen aan de oplossing aan te passen" in plaats van bij gegeven grenzen een oplossing te vinden.

Laten we het aan een voorbeeld toelichten. Het veld van twee oneindige, evenwijdige ladingsrechten op afstand 2d, homogeen geladen met dichtheden λ, resp. $-\lambda$ kan rechtstreeks bepaald worden. De ekwipotentiaalvlakken zijn cirkelcilinders, die een vlak, loodrecht op de twee rechten, snijden volgens een cirkelbundel (zie figuur). De veldlijnen van $\vec{E}$ vormen de daarmee orthogonale cirkelbundel met de twee basispunten op de ladingsrechten. Stel $V = 0$ in het vlak $z = 0$ midden tussen de 2 rechten.



Ekwipotentialen (---) en veldlijnen (—) van twee evenwijdige, tegengestelde ladingsrechten.

N.B. De vergelijking voor de ekwipotentialen in vlak $z = 0$ kunt u zelf afleiden: met r_1 en r_2 als afstanden tot de 2 rechten komt er $\ln(r_1/r_2)$ = konstant of r_1^2/r_2^2 = konstant of ook $x^2 + y^2 - 2\alpha dx + d^2 = 0$ d.i. de vergelijking van de getekende cirkelbundel.

Hieruit leiden we direkt de oplossing af van andere problemen. Stel dat op één der ekwipotentiaalvlakken $V = 100$ volt. Dan verandert er niets als we ter plaatse van dat vlak een metalen buis aanbrengen die op 100 volt is gebracht. De door die buis omvatte ladingsrechte denken we afwezig. Dan is ook opgelost het andere probleem van een op 100 volt gebrachte cilindrische geleider met op enige afstand een oneindige ladingsrechte: immers buiten en op de cilinder voldoet het aan de figuur ontleende veld precies aan potentiaalvergelijking + randkondities in dat andere probleem (ga dat na!).Op grond van de uniciteitsstelling is dat dus de werkelijke oplossing in dat gebied.

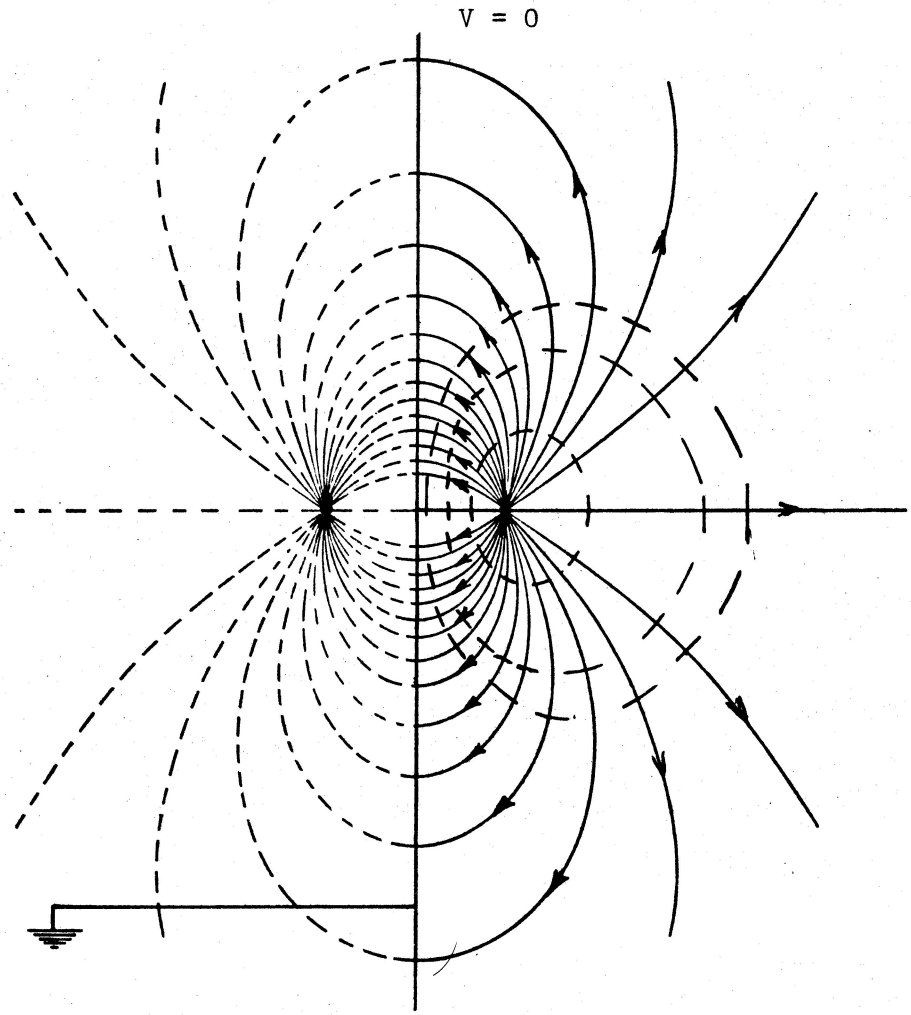
Andere gevallen waarvan de oplossing in de figuur gegeven is: een geladen cilinder tegenover een geleidend, geaard plat vlak; twee evenwijdige cilinders met gegeven potentiaalverschil, buiten elkaar of de een binnen de ander. (In elk van deze gevallen is de gezochte cirkelbundel bepaald omdat 2 exemplaren gegeven zijn, λ volgt uit aangegeven potentiaalverschillen).

Deze methode willen we toepassen op twee gevallen om er enkele resultaten uit af te leiden die later gebruikt kunnen worden.

I. Puntlading en vlakke geaarde geleiders

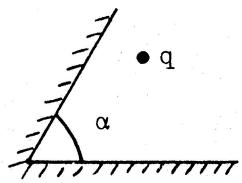
Een puntlading q staat op afstand a van een vlakke geaarde geleider. Er wordt een tegengestelde lading ge-influenceerd. Hoe wordt het veld en hoe de ladingsverdeling op de plaat?

De oplossing ontlenen we aan het veld van een tweepool, waarbij -q gedacht wordt in het spiegelbeeld van +q t.o.v. de plaat (vandaar de naam "beeldladingsmethode".) Inderdaad: in het veld van een tweepool $\pm q$ in de punten $z = \pm d$ is het middenloodvlak $z = 0$ het ekwipotentiaalvlak $V = 0$. In de halve ruimte $z \geq 0$ voldoet het tweepoolveld precies aan dezelfde potentiaalvergelijking en randkondities als het gegeven probleem, in dat gebied kunnen we dus de oplossing overnemen.

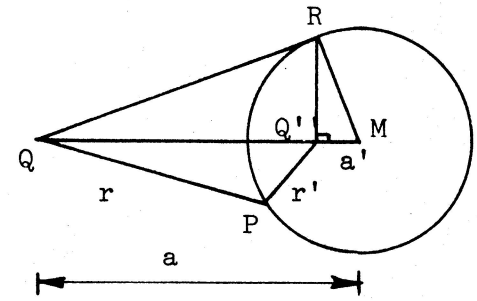


Het volgende kunt u nu zelf berekenen:

- op de geleider is de ladingsdichtheid op afstand r van de puntlading $\sigma = -qd/2\pi r^3$ (wat levert integratie over de geleider?);
- de kracht op de puntlading is $q^2/16\pi\varepsilon_o d^2$ (beeldkracht);
- de energie van de puntlading is $q^2/16\pi\varepsilon_o d$;
- wat is het veld op grote afstand van q?
- het veld van een dipool (bijvoorbeeld // geleider of $\perp$ geleider), geplaatst nabij een geaarde vlakke geleider (kracht op de dipool? koppel?totale influentielading? veld op grote afstand?);
- het veld van een homogene ladingsrechte // geleider;
- het veld van puntlading q tussen twee geleidende vlakken die elkaar onder een hoek α snijden.



II. Puntlading en geleidende bol



Schoolmeetkunde: bol met straal R, punten Q en Q' op afstanden a resp. a' van M waarbij QQ' door M gaat en $aa' = R^2$ (QR raakt en RQ' $\perp$ QM). Q en Q' heten elkaars beeldpunten t.o.v. de bol (toegevoegde punten, elk ligt in het poolvlak van de ander t.o.v. de bol). Voor elke P op de bol is dan (bewijs zelf)

$$r'/r = \text{konstant} = R/a = a'/R$$

Dus ook: gegeven 2 punten Q en Q', dan is de verzameling van P, waarvoor r/r' een gegeven konstante is, een bol.

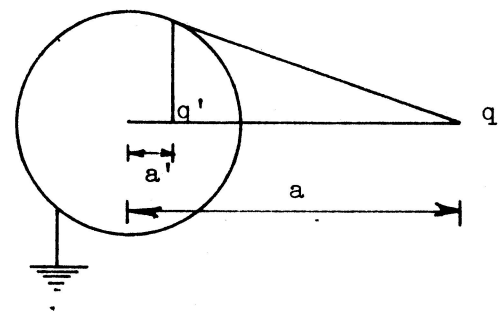
Gevolg: in het veld van twee willekeurige puntladingen q en q' van tegengesteld teken is het ekwipotentiaalvlak V = 0 een bol.

Immers: zij q > 0 en q' < 0 en r en r' afstanden tot deze twee ladingen. Dan is overal $4\pi\varepsilon_0 V = q/r + q'/r'$ en de konditie V = 0 wordt

$$\frac{q}{r} - \frac{|q'|}{r'} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{r}{r'} = \frac{q}{|q'|} = \text{konstante}$$

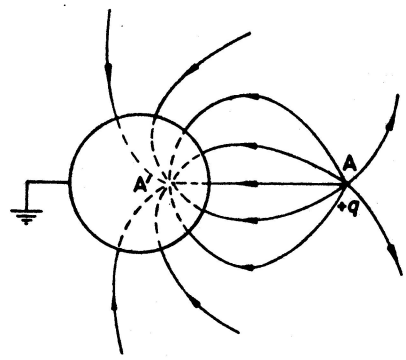
en dit beschrijft juist een bol, waarvan straal en middelpunt afgeleid kunnen worden uit afstand en verhouding van q en q' (de bol omvat de puntlading met de kleinste absolute waarde).

Puntlading nabij geaarde bol:



Denk in het beeldpunt op $a' = R^2/a$ een lading $q' = -Rq/a$ dus $|q'| < q$).

Als we de bol vervangen denken door deze "beeldlading" voldoet op en buiten het boloppervlak het veld precies aan potentiaalvergelijking + randkondities van het werkelijke probleem, in het bijzonder is V = 0 op het boloppervlak (ga na!). Daarmee is het probleem opgelost.

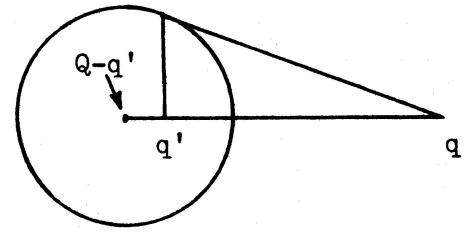


Het volgende kunt u zelf berekenen:

- de totale influentie-lading op de bol is q' (kies een passend Gauss-oppervlak) zodat niet alle veldlijnen van q op de bol eindigen of ontspringen;
- op de bol is $\sigma = -(a^2 - R^2)q/4\pi Rr^3$ als r = afstand tot q;
- de beeldkracht is $aRq^2/4\pi\varepsilon_0(a^2 - R^2)^2$;
- bedenk hoe het geval van de vlakke geleider uit dat van de bol kan worden afgeleid.

<u>Puntlading nabij geisoleerde bol</u>:

In plaats van de potentiaal is nu de lading Q van de bol gegeven. De oplossing volgt uit het vorige geval. Het veld van q en q' geeft wel een <u>konstante</u> V = 0 ter plaatse van het boloppervlak maar de waarde van V hoeft nog niet juist te zijn.



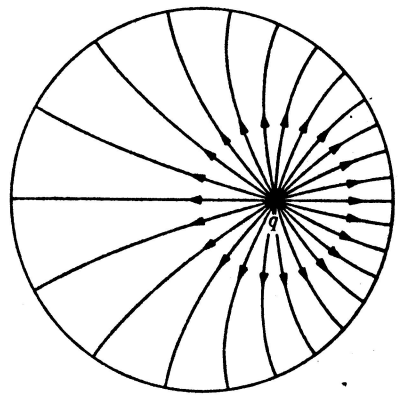
In het werkelijke probleem is de flux van $\vec{E}$ door het boloppervlak Q, in het veld van q en q' is de flux q'. Denk nu in het centrum van de bol nog eenlading Q - q' geplaatst. Het <u>somveld</u> van dit 3-tal ladingen in vakuum voldoet dan op en <u>buiten</u> de bol weer precies aan Poisson + randkondities, in het bijzonder is V op de bol weer konstant terwijl uit Gauss volgt dat de omvatte lading inderdaad Q is.

De potentiaal van de geleider is die van de lading in het centrum:

$$4\pi\varepsilon_o V_{bol} = \frac{Q - q'}{R} = \frac{Q}{R} + \frac{q}{a}$$

Bereken zelf de beeldkracht op q; als Q = 0 is die uiteraard altijd aantrekkend; is qQ < 0 dan is er ook aantrekking maar als qQ > 0 kan de kracht nul zijn, afstotend maar ook aantrekkend!

Allerlei andere potentiaalproblemen kunnen uit het vorige door variaties of superpositie worden afgeleid, bijvoorbeeld het veld in een bolvormige holte in een geleider, waarin excentrisch een puntlading is geplaatst:



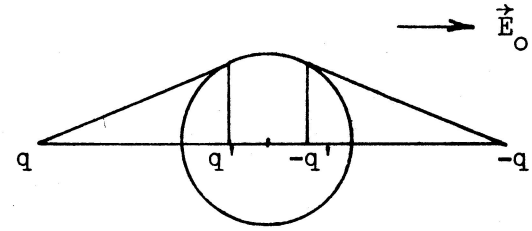
Probeer dit zelf te vinden, bereken beeldkracht, influentielading, e.d.

Bolgeleider in homogeen veld

Een ongeladen bol wordt in een aanvankelijk homogeen veld $\vec{E}_o$ geplaatst. De oplossing van dit probleem volgt uit het voorgaande.

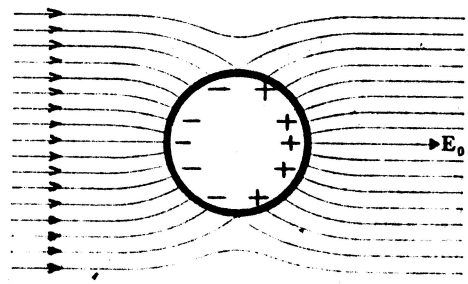
Denk in vakuum twee ladingen q en -q aan wwerszijden van M op afstand a. De veldsterkte in M is $2q/4\pi\varepsilon_o a^2$ en dit is gelijk aan E_o bij passend gekozen q/a^2. Voor $q \to \infty$ en $a \to \infty$ met konstante q/a^2 ontstaat het homogene veld $\vec{E}_o$. We lossen het influentieprobleem op voor eindige q en a en nemen vervolgens de genoemde limiet.

Buiten de bol wordt het veld bepaald door de tweepool (q, -q) met lengte 2a en de beeldtweepool (q',-q') met lengte 2a'. De eerste geeft in de limiet het homogene veld $\vec{E}_o$, de tweede heeft dipoolmoment $-2a'q' = 2R^3q/a^2 = 4\pi\varepsilon_o R^3 E_o$ en dat is konstant bij de limietprocedure. Het moment heeft voorts de richting van $\vec{E}_o$ zodat het in de limiet een zuiver dipoolveld geeft met



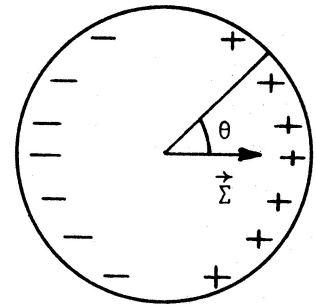
$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_o R^3 \vec{E}_o \qquad (32)$$

De influentielading geeft dus buiten de bol een dipoolveld (er binnen uiteraard een homogeen veld $-\vec{E}_o$). Zie nog eens de laatste opgave van §2.



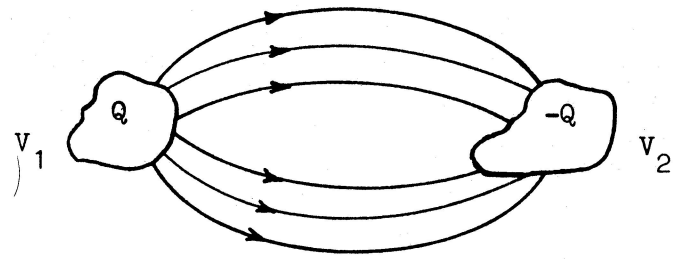
In punten (R,θ) is $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_{dipool} = 3E_o\cos\theta\ \hat{R}$ en dus is $\sigma = 3\varepsilon_o E_o \cos\theta$ zodat de influentielading een <u>cosinus-verdeling</u> heeft. Hieruit volgt dus algemeen: een bol met oppervlaktelading $\sigma = \Sigma \cos\theta$ geeft

- binnen de bol een homogeen veld $-\vec{\Sigma}/3\varepsilon_o$
- buiten de bol het veld van een dipool $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3\vec{\Sigma}$ = volume. $\vec{\Sigma}$ in het centrum.



§8. Kondensatoren

Het laden van een geleider betekent in de praktijk het scheiden van + en - lading. We beschouwen daarom een systeem van 2 geleiders met ladingen Q (> 0) en -Q. Indien alle flux die van Q uitgaat ook eindigt bij -Q (ga na dat dit zo is bij afwezigheid van andere geleiders of ladingen) noemen we dit systeem een kondensator. Men noemt Q de lading van de kondensator.



Als V het potentiaalverschil $V_1 - V_2$ is geldt

$$\boxed{Q = CV} \qquad (33)$$

waarin C de <u>kapaciteit</u> van de kondensator heet (eenheid coulomb/volt = F = farad. Dit is een zeer grote eenheid, in de praktijk is 1 μF al een grote kapaciteit). Deze evenredigheid volgt direkt uit de uniciteitsstelling: bij gegeven Q is het veld uniek bepaald en uit de randkonditie (30) volgt dat dit veld evenredig met Q is.

De energie van een geladen kondensator is $\frac{1}{2}QV_1 - \frac{1}{2}QV_2$ of

$$W = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}QV = \tfrac{1}{2}Q^2/C \qquad (34)$$

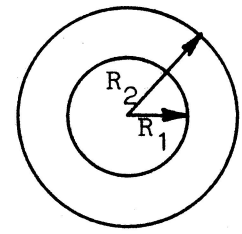
wat natuurlijk ook als veldenergie geschreven kan worden.

C is "de lading die men per volt kan opslaan". In vakuum wordt C geheel bepaald door de geometrie. Berekening ervan is zelden eenvoudig omdat daarvoor een potentiaalprobleem moet worden opgelost, voor eindige geleiders slechts zelden exakt mogelijk. Men is dus aangewezen op metingen, op numerieke methoden of op benaderingen.

Bolkondensator

Een van de weinige, exakt oplosbare gevallen. Hier is

$$C = 4\pi\varepsilon_o \frac{R_1 R_2}{d} = \varepsilon_o \frac{\langle O \rangle}{d} \qquad (35)$$



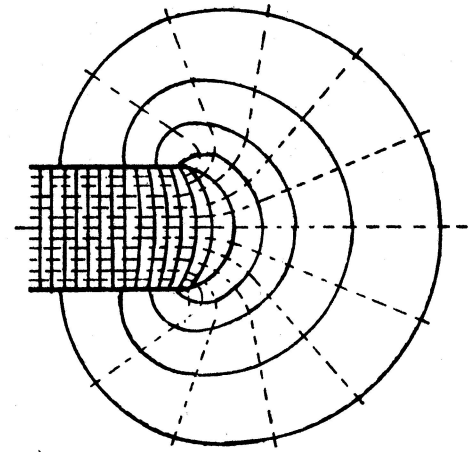
$R_2 - R_1 = d$

waarin O het geometrisch gemiddelde is van de oppervlakken $4\pi R_1^2$ en $4\pi R_2^2$.

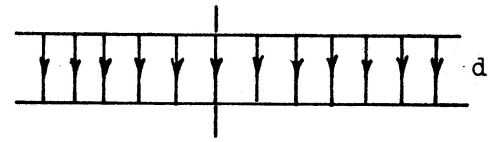
Ook voor een enkele bol en i.h.a. voor een enkele geleider definieert men wel de kapaciteit C = Q/V. Dat is dan de kapaciteit "t.o.v. het oneindige" (of aarde), voor een bol $4\pi\varepsilon_o R$.

Vlakke kondensator

Hier verwaarlozen we het randeffekt, hetgeen geoorloofd is als d << afmetingen van de platen en benaderen het $\vec{E}$-veld als homogeen tussen de platen (waarom kan dit niet de exakte oplossing zijn? hoe is het veld op enige afstand van de kondensator?). Men vindt dan (O = opp)



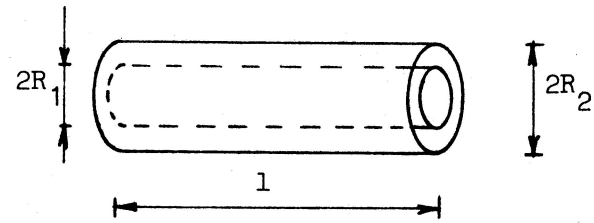
$$C = \varepsilon_o \frac{O}{d} \qquad (36)$$



Een korrektie voor het randeffekt is te vinden in Kohlrausch, Praktische Physik.

Cilinderkondensator

Voor twee lange ko-axiale, cilindrische geleiders onder verwaarlozing van het randeffekt ($l >> (R_2 - R_1)$):



$$C = 2\pi\varepsilon_0 l/\ln(R_2/R_1) \qquad (37)$$

De kapaciteit van twee niet-ko-axiale evenwijdige cilinders of bijvoorbeeld twee // cilindrische draden wordt gevonden door het potentiaalprobleem op te lossen volgens de manier, aangegeven in het begin van deze §.

Zoals te verwachten was laten (35), (36) en (37) zien dat C toeneemt als de geleiders dichter bij elkaar gebracht worden.

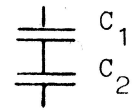
Opgave:

De aantrekkende kracht tussen de platen van een vlakke kondensator is natuurlijk

$$F = \tfrac{1}{2}QE = \tfrac{1}{2}CV^2/d = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{V^2}{d} \qquad (38)$$

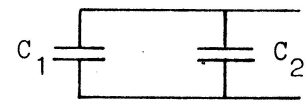
Leid dit ook eens af uit (34) door de arbeid te berekenen bij kleine veranderingen van d en wel voor een geisoleerde kondensator en voor een kondensator, verbonden met een bron van konstante spanning.

In schakelingen van kondensatoren kan men vervangingskapaciteiten definiëren:



- serieschakeling $\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$ (39)

- parallelschakeling $C = \sum C_i$ (40)



Opgave:

Ga na hoe de spanningsverdeling is over twee kondensatoren in serie en de ladingsverdeling over twee parallele kondensatoren.
Twee geladen kondensatoren worden parallel geschakeld. Wat is de eindsituatie? Is er behoud van elektrostatische energie?

IV. DIËLEKTRIKA

§9. De diëlektrische konstante

In het voorgaande werd de elektrostatika behandeld van ladingen in vakuum of op geleiders. We moeten nog nagaan wat de verschijnselen zijn bij aanwezigheid van andere ponderabele materie, met name van een niet of slechts zwak geleidend medium, in dit verband een diëlektrikum genoemd.

Ook hier kan weer een konservatief elektrostatisch veld $\vec{E}$ gedefinieerd worden (zie §5). We willen nagaan wat de invloed is van een diëlektrikum op een elektrisch veld en omgekeerd hoe een diëlektrikum zich in zo'n veld gedraagt.

We gaan uit van een empirisch gegeven dat al door Faraday gevonden werd: als een kondensator geheel omgeven is door een homogeen, isotroop diëlektrikum is er weer een konstante verhouding tussen lading en spanning, de kapaciteit is echter toegenomen met een faktor ε_r die karakteristiek voor dat diëlektrikum is. De faktor ε_r heet de diëlektrische konstante van het materiaal en is mede afhankelijk van druk en temperatuur. Het is een dimensieloze grootheid, die altijd > 1 is.

Er zijn uitzonderingen: anisotrope kristallen (richtingsafhankelijkheid, i.h.a. echter wel een "lineair" gedrag) en zgn. ferro-elektrika zoals $BaTiO_3$.

In de tabel (zie blz. 29) is een aantal "gewone" diëlektrika vermeld met hun ε_r (de zgn. statische waarde) en de doorslagveldsterkte E_D. Let op de relatief grote waarde van ε_r bij een drietal dipoolstoffen.

In de praktijk dienen diëlektrika in kondensatoren als isolator (voorkomen van kortsluiting) maar tegelijk wordt de kapaciteit vergroot en krijgt de doorslagveldsterkte een grotere waarde dan in lucht (overigens is natuurlijk vooral van belang dat het geleidingsvermogen zeer klein is).

We moeten nu proberen een verklaring te geven voor de diëlektrische konstante om vervolgens de elektrostatika algemeen te formuleren.

TABEL VAN DIËLEKTRISCHE KONSTANTEN EN DOORSLAGVELDSTERKTEN

		ε_r	E_D
droge lucht	(1 atm, 20° C)	1,00054	∿ 3,0 kV/mm
H_2	(" ")	1,00025	∿ 2,0
O_2	(" ")	1,00050	∿ 2,6
CO_2	(" ")	1,00092	∿ 2,9
zwavel		3,7-4,4	
NaCl	20°	5,6	
mica		7	5-20
silicaten	20°	4-15	300-1000
glassoorten		5-10	∿ 9
kwartsglas		3,8	
pyrexglas		4-6	
elektr. porcelein		5,5	
fijn papier		2,23	∿ 50
polystyreen		2,5	∿ 50
olie		2,2	∿ 20
rubbers		2,5-7	16-40
houtsoorten		1-9	
paraffine		2,2	10
bakeliet		7,6	12
nylon		3,5	16
polyethyleen		2,3	17
C_2H_5OH	20°	25,7	
H_2O	20°	80	
	25°	78,5	
NH_3	0°	8,3	
	- 34°, vloeibaar	22	

§10. Polarisatie

De elektrische eigenschappen van diëlektrika moeten uiteraard worden teruggebracht tot de struktuur van de atomen, molekulen of ionen en hun onderlinge wisselwerking in gas, vloeistof of vaste stof (dit wordt verder uitgewerkt in het kollege Struktuur der Materie II).

Een neutraal atoom of molekuul dat geen eigen dipoolmoment heeft zal in een uitwendig elektrisch veld $\vec{e}$ een kleine deformatie ondergaan, zodat de zwaartepunten van + en - lading niet meer samenvallen. Het wordt gepolariseerd en krijgt een ge-induceerd dipoolmoment $\vec{p}_{ind}$. Dit effekt heet ge-induceerde polarisatie. Berekeningen aan eenvoudige modellen (maar ook aan meer realistische modellen m.b.v. de quantum-mechanika) leren dat $\vec{p}_{ind}$ evenredig is met het lokale, polariserende veld:

$$\vec{p}_{ind} = \alpha\varepsilon_o\vec{e} \qquad (41)$$

De faktor α heet de atomaire of molekulaire polariseerbaarheid, heeft de dimensie van een volume, terwijl de waarde ruwweg gelijk is aan het atomaire of molekulaire volume (zie bijv. (32) d.i. het moment van een metalen bolletje in een veld, door Mossotti in de vorige eeuw als primitief model gekozen). Strikt genomen geldt (41) alleen voor bolsymmetrische deeltjes (1-atomige gassen), maar omdat het ook geldt voor het gemiddelde moment van een groot aantal vrije, willekeurige (niet-isotrope) molekulen, kan (41) algemeen gebruikt worden.

Hebben de molekulen wel een eigen, permanent dipoolmoment $\vec{p}_{perm}$ (dipoolstoffen) dan zal hetzelfde effekt optreden en verandert het moment tot $\vec{p} = \vec{p}_{perm} + \vec{p}_{ind}$. Meestal is echter $p_{ind} << p_{perm}$ en de ge-induceerde polarisatie wordt doorgaans overschaduwd door een veel groter effekt: het richten van deze dipolen in het veld door het koppel $\vec{p} \times \vec{e}$. Dit effekt heet oriënteringspolarisatie of dipool-polarisatie. Natuurlijk staan de molekulen niet "in het gelid", zij bewegen en botsen zodat hun oriëntatie voortdurend verandert. Maar de gemiddelde waarde $\langle\vec{p}\rangle$, genomen over zeker tijdsinterval van een groot aantal molekulen in een volume-element, die i.h.a. $\vec{0}$ is voor een ge-isoleerd systeem, zal $\neq \vec{0}$ zijn en in de veldrichting staan als zo'n systeem in een uitwendig veld geplaatst wordt, bijv. tussen twee kondensatorplaten.

Uiteraard zal de oriëntering door de thermische beweging worden tegengewerkt, deze polarisatie is dus essentieel temperatuur-afhankelijk en wel groter bij lagere T.

In beide gevallen wordt het effekt makroskopisch beschreven door de <u>polarisatie-vektor</u> $\vec{P}$, gedefinieerd als het dipoolmoment per eenheid van volume of dipooldichtheid (analoog ladingsdichtheid). Is $\Delta\vec{p}$ de som van de momenten van alle molekulen in volume-element Δv dan is

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \text{ klein}} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta v} \tag{42}$$

Als in een enkelvoudige stof n de deeltjesdichtheid is zal bij induceerde polarisatie

$$\vec{P} = n\vec{p}_{ind} \tag{43}$$

en bij dipool-polarisatie

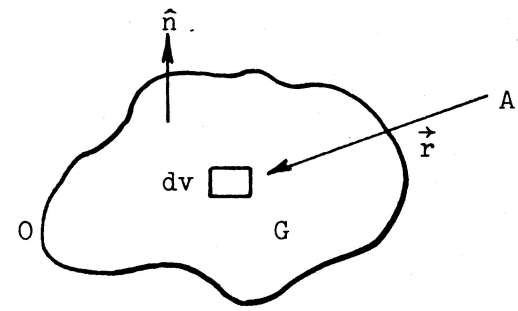
$$\vec{P} = n < \vec{p} > \tag{44}$$

$\vec{P}$ heeft de dimensie van een oppervlakladingsdichtheid, eenheid C/m^2.

§11. <u>Veldbijdrage van een gepolariseerd medium</u>

Als in een gegeven veld $\vec{E}_o$, bijvoorbeeld tussen 2 kondensatorplaten in vakuum, een neutraal medium wordt gebracht zal het uiteindelijke veld de som zijn van $\vec{E}_o$ en van een bijdrage van alle atomen, molekulen, etc. van dat medium. De bijdrage $\vec{E}_p$ aan het makroskopische veld $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$ wordt zowel binnen als buiten het medium in zeer goede benadering gevonden door het medium te beschouwen als een kontinue dipoolverdeling in vakuum, beschreven door $\vec{P}$ als funktie van de plaats.

Laat het medium een gebied G met oppervlak O vullen. Om in A de potentiaal V van de dipoolverdeling te vinden, kiezen we A als oorsprong en ontlenen aan (15) de bijdrage dV van volume-element dv op afstand $\vec{r}$ aan V;



omdat dv een dipool-moment $\vec{P}(\vec{r})dv$ heeft en $-\vec{r}$ de vektor is die van dipool naar A wijst, is

$$4\pi\varepsilon_o dV = -\vec{P}\cdot\hat{r}dv/r^2 = \vec{P}\cdot\text{grad } r^{-1}dv$$

zodat bij integratie over G en toepassing van het theorema van Gauss

$$4\pi\varepsilon_o V = \iiint_G \vec{P}(\vec{r})\cdot\text{grad } r^{-1}dv(\vec{r}) = \iiint_G \{\text{div } \vec{P}r^{-1} - r^{-1}\text{div } \vec{P}\}\, dv =$$

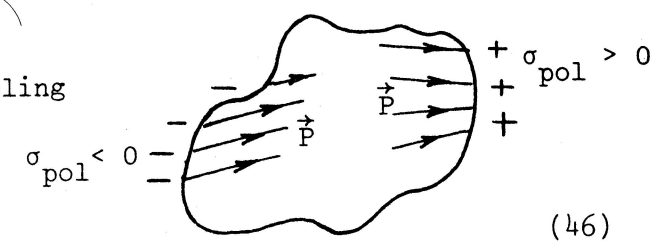
$$= \oiint_O \frac{\vec{P}\cdot d\vec{O}}{r} - \iiint_G \frac{\text{div } \vec{P}}{r}\, dv = \oiint_O \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{r}\, dO - \iiint_G \frac{\text{div } \vec{P}}{r}\, dv$$

Dit betekent dat de eigen veldbijdrage van het medium gelijk is aan desom van de velden van

1) een oppervlakladingsverdeling in vakuum met dichtheid

$$\sigma_{pol} = \vec{P}\cdot\hat{n} \qquad (45)$$

de <u>oppervlakte-polarisatielading</u>, met dichtheid gelijk aan de naar buiten wijzende normale komponent van $\vec{P}$;



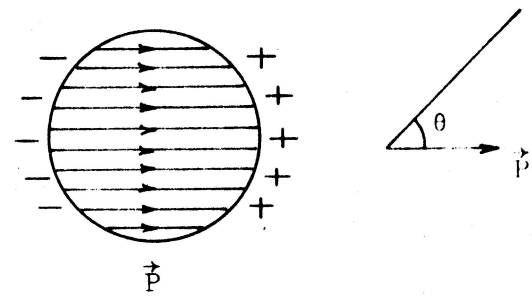
2) een ruimtelijke ladingsverdeling in vakuum

$$\rho_{pol} = -\text{div } \vec{P} \qquad (46)$$

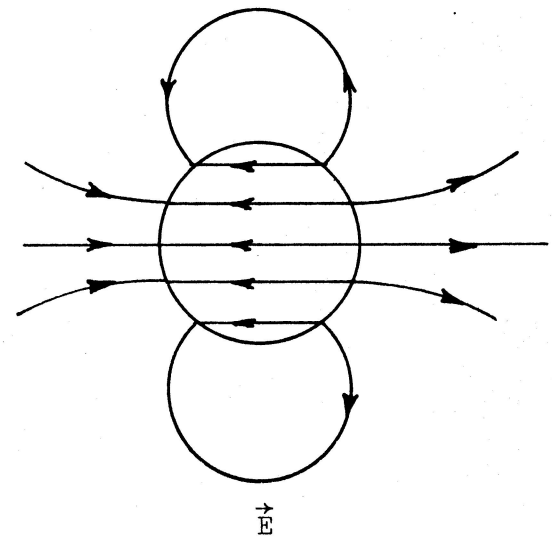
de <u>ruimtepolarisatielading</u> (bij homogene polarisatie uiteraard nul).

Deze polarisatieladingsverdeling is te beschouwen als het netto ladingsoverschot aan 't oppervlak of inwendig ontstaan bij de polarisatie van het medium. Omdat het medium als geheel neutraal blijft moet de totale polarisatielading nul zijn, ga dit zelf na.

<u>Voorbeeld</u>: het eigen veld van een homogeen gepolariseerde bol is (wegens (45) gelijk aan dat van een boloppervlak in vakuum met ladingsdichtheid $\sigma_{pol} = P\cos\theta$. Dit veld hebben we al afgeleid (zie eind §7):



- binnen de bol homogeen en $= -\frac{1}{3\varepsilon_o}\vec{P}$;
- buiten de bol als van dipool $\vec{p}$ in centrum met $\vec{p}$ = volume x $\vec{P}$ (dat is juist het totale moment van de bol).



Merk op dat $\vec{E}_p$ ter plaatse van het medium tegen $\vec{P}$ in gericht is: de dipolen geven een tegenveld.

§12. <u>Algemene vorm van de wet van Gauss</u>

In §11 is geen enkele speciale onderstelling gemaakt ten aanzien van de aard van het diëlektrikum, het resultaat is dus heel algemeen. We zullen daaruit nu de wet van Gauss afleiden zoals die zonder beperking geldig is.

In de meest algemene situatie zijn er geleiders en gepolariseerde diëlektrika met ladingen op de geleiders, in of op de diëlektrika en in vakuumgebieden. De velden V en $\vec{E}$ veranderen niet als we de werkelijke situatie vervangen denken door vakuum met passende ladingsverdeling, i.h.b. aan de oppervlakken van de geleiders en een polarisatie-ladingsverdeling σ_{pol} en ρ_{pol} ter plaatse van de diëlektrika. Voor die ekwivalente situatie geldt echter de wet van Gauss voor vakuum mits we ook de polarisatieladingen als bronnen van $\vec{E}$ nemen en dus

$$\text{div}\ \varepsilon_o\vec{E} = \rho + \rho_{pol}$$

(ρ en ρ_{pol} omvatten daarin ook σ en σ_{pol}). Wegens (46) is dus ook

$$\text{div}\ (\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}) = \rho \qquad (47)$$

waarbij het rechterlid geen polarisatieladingen meer bevat, men noemt dit rechterlid wel de "vrije" ladingsdichtheid. (47) zegt dat de "vrije" ladingen de bronnen zijn van de lineaire kombinatie $\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P}$.

Deze kombinatie geven we een eigen naam en symbool

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} \tag{48}$$

de elektrische verplaatsing, verschuiving of doorschuiving (Maxwell: displacement). De dimensie van $\vec{D}$ is, evenals die van $\varepsilon_o \vec{E}$ en van $\vec{P}$, een oppervlakladingsdichtheid. De wet van Gauss wordt nu

$$\boxed{\text{div}\, \vec{D} = \rho} \tag{49}$$

of in integrale vorm

$$\boxed{\oint_O \vec{D} \cdot d\vec{O} = Q_{omvat}} \tag{50}$$

In vakuum is $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$ dus dan zijn $\vec{D}$ en $\vec{E}$ niet essentieel verschillend. Uiteraard is de wet van Gauss voor dat geval, (2) en (3), in (49) en (50) besloten. In diëlektrika zijn van het drietal $\vec{D}$, $\vec{E}$ en $\vec{P}$ er i.h.a. twee onafhankelijk. De bronnen van deze 3 velden (let op de tekens!) zijn dus

$$\text{div}\, \vec{D} = \rho \qquad \text{div}\, \vec{P} = -\rho_{pol} \qquad \text{div}\, \vec{E} = (\rho + \rho_{pol})/\varepsilon_o \tag{51}$$

Het veld $\vec{E}$ is konservatief of rotatie-vrij, $\vec{D}$ en $\vec{P}$ i.h.a. niet.

§13. Het verband tussen $\vec{P}$ en $\vec{E}$; de diëlektrische konstante

Om het elektrostatische probleem, met name dat van de kondensator in §9, op te lossen is nog nodig een verband tussen de 3 velden $\vec{D}$, $\vec{P}$ en $\vec{E}$. Uiteraard komen hier de specifieke eigenschappen van het medium in het geding.

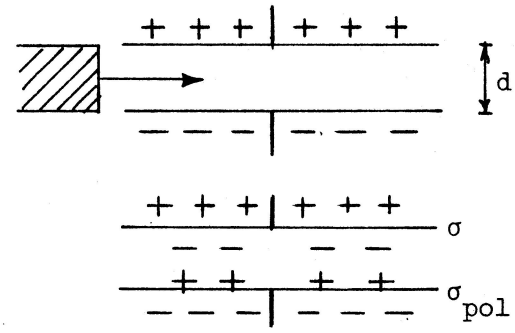
Neem het geval van een kondensator met konstante lading zodat het veld $\vec{E}_o$ (zie §11) bekend is. De polarisatie $\vec{P}$ die ontstaat bij het inbrengen van een diëlektrikum is dan niet zo eenvoudig te berekenen: het polariserende veld $\vec{e}$ dat leidt tot $\vec{p}_{ind}$ volgens (41) of tot oriëntering van permanente dipolen is immers niet gelijk aan $\vec{E}_o$ omdat er ook wisselwerking is tussen de molekulen. Hoe het lokale veld $\vec{e}$ in een aantal gevallen berekend kan worden komt in het kollege Struktuur der Materie II ter sprake.

We vermelden hier dat voor de overgrote meerderheid van diëlektrika - de in §9 bedoelde "gewone" diëlektrika - evenredigheid bestaat tussen $\vec{P}$ en $\vec{E}$ in de statische situatie

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_o \vec{E} \qquad (52)$$

Hierin is $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p$ = het totale makroskopische elektrische veld en χ_e een dimensieloze materiaalgrootheid, die de <u>elektrische susceptibiliteit</u> heet en > 0 is.

De betekenis van de diëlektrische konstante ε_r volgt nu onmiddellijk. Stel dat we een vlakke vakuumkondensator isoleren (Q konstant) en in het medium brengen. Eerst was het veld $E_o = \sigma/\varepsilon_o$ en $V_o = E_o d$. Met het medium wordt het veld $E = (\sigma - \sigma_{pol})/\varepsilon_o = E_o - P/\varepsilon_o$ dus wegens (52)



$$E = E_o - \chi_e E \quad \text{of} \quad E = E_o/(1 + \chi_e)$$

De veldsterkte is een faktor $1 + \chi_e$ kleiner geworden, dus ook de potentiaal en omdat de lading konstant was is de kapaciteit $1 + \chi_e$ maal zo groot geworden dus

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi_e} \qquad (53)$$

Altijd is $\varepsilon_r > 1$.

<u>Opgave</u>:

Leid (53) ook eens af uit de verandering die optreedt als niet Q maar V konstant gehouden wordt (kondensator met akku verbonden).

Beperken we ons tot diëlektrika waarvoor (53) geldt dan is er van de velden $\vec{D}$, $\vec{P}$ en $\vec{E}$ nog maar één "onafhankelijk" en volgt

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_o (1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E} \qquad (54)$$

Hierin is ε de permittiviteit van het medium, eenheid F/m, $\varepsilon > \varepsilon_o$ en $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$ heet ook wel relatieve permittiviteit.

χ_e en ε_r behoeven niet noodzakelijk in alle punten van de ruimte een konstante waarde te hebben. Als echter het medium homogeen is overal waar het elektrische veld van nul verschilt wordt de elektrostatika bijna dezelfde als in vakuum: we behoeven alleen maar ε_o door ε te vervangen. Bijvoorbeeld (leid zelf af):

de wet van Gauss wordt $\quad \operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon$

Coulomb-kracht tussen 2 metalen bolletjes $\vec{F}_{12} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$

potentiaal van zo'n bolletje $\quad V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}$

Poisson-vergelijking $\quad \Delta V = -\,\rho/\varepsilon$

geleidend oppervlak $\quad E_{opp} = \pm\,\sigma/\varepsilon$

Een algemene uitdrukking voor de dichtheid van elektrostatische veldenergie, ook in niet-homogene en zelfs anisotrope media, is

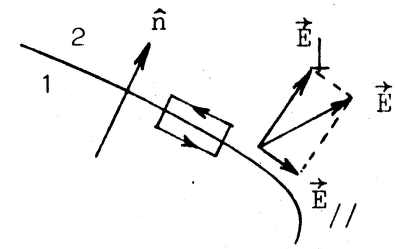
$$w_{el} = \tfrac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} \qquad (55)$$

§14. Velden aan grensvlakken

Aan het grensvlak tussen twee diëlektrika of tussen een diëlektrikum en een geleider of vakuum kunnen de velden $\vec{D}$, $\vec{E}$ en $\vec{P}$ diskontinu zijn. Deze diskontinuiteiten volgen voor $\vec{D}$ uit de wet van Gauss (50) en voor $\vec{E}$ uit het konservatief gedrag (uitbreiding van (8)):

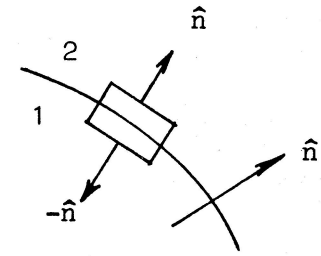
de tangentiële komponent van $\vec{E}$ is kontinu

uit $\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ volgt $\vec{E}_{1//} = \vec{E}_{2//}$ (56)



de normale komponent van $\vec{D}$ maakt een sprong = σ

uit de wet van Gauss op het "pillendoosje" volgt

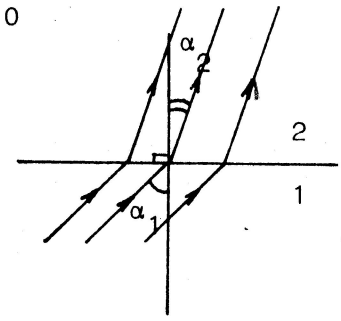


$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\hat{n} = \sigma \qquad (57)$$

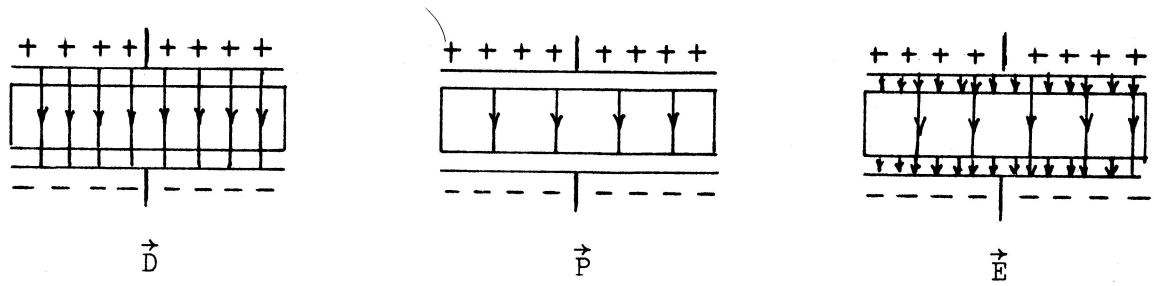
Is aan weerszijden de relatie tussen $\vec{D}$ en $\vec{E}$ bekend dan volgt uit (56) en (57) het verband tussen de veldvektoren aan weerszijden van het grensvlak.

Is met name $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1$ en $\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2$ en $\sigma = 0$ dan volgt de "brekingswet van veldlijnen"

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \qquad (58)$$



Als illustratie tekenen we nog de 3 velden in een ideale kondensator met een spleet tussen platen en medium; de in (51) aangegeven "bronnen" zijn hier duidelijk terug te vinden.



§15. Aanvullingen

De relatie (52) zou in beginsel uit de struktuur van de atomen, molekulen of ionen en uit hun wisselwerking moeten kunnen worden afgeleid. Van zo'n "theorie van de diëlektrische konstante" geven we hier summier enkele resultaten.

Voor een enkelvoudig gas bij lage dichtheid waarvan de molekulen geen permanent dipoolmoment hebben is

$$\chi_e = n\alpha \tag{59}$$

met α bepaald door (41) en n de deeltjesdichtheid. Omdat $\alpha \ll 1/n$ (waarom?) is dan $\chi_e \ll 1$, zie de waarden voor lucht, H_2, O_2 en CO_2 in de tabel van §9. (59) volgt uit (41), (43) en (52) bij verwaarlozing van de wisselwerking tussen de molekulen.

Voor niet-polaire verdichte gassen, voor sommige vloeistoffen en voor kubische kristallen geldt in goede benadering de relatie van Clausius en Mossotti

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - n\alpha/3} \qquad \text{of ook} \qquad \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3} n\alpha \tag{60}$$

Hierin is de wisselwerking verdiskonteerd, χ_e neemt toe bij stijgende dichtheid n, voor lage dichtheden gaat (60) weer over in (59). In beide gevallen hangen χ_e en ε_r niet expliciet van de temperatuur of druk af, alleen n is daarvan afhankelijk.

Bij dipoolstoffen worden χ_e en ε_r mede (of in hoofdzaak) bepaald door de oriënteringspolarisatie, een effekt dat essentieel van de temperatuur afhangt. Voor dat geval is de theorie gegeven door Debije in 1912, ontleend aan de overeenkomstige behandeling van magnetische dipolen door Langevin in 1905. Voor verdunde gassen (verwaarlozing van de wisselwerking) wordt (59) dan uitgebreid tot

$$\chi_e = n \{\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT}\} \tag{61}$$

waarin p het molekulaire dipoolmoment is, k de konstante van Boltzmann en T de absolute temperatuur. Veelal overweegt in (61) de laatste term. Voor dichte media moet weer de wisselwerking tussen de dipolen worden verdiskonteerd. In goede benadering geldt dan de volgende uitbreiding van (60)

$$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{1}{3} n \{\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_o kT}\} \qquad (62)$$

De relatief grote waarde van ε_r in de tabel van §9 voor de 3 laatste stoffen is kennelijk toe te schrijven aan de dipool-polarisatie.

Geen van deze uitdrukkingen is geheel exakt, ondanks verfijningen zijn alle bestaande theorieën min of meer goede benaderingen. Het is echter duidelijk dat metingen van de diëlektrische konstante nadere informatie kunnen geven over de molekulaire struktuur.

In het voorgaande hebben we steeds de statische waarde van ε_r bedoeld, in een periodiek wisselend elektrisch veld van hoge frekwentie wordt ε_r een funktie van de frekwentie en treden dispersie-verschijnselen op.

LITERATUURLIJST

Uit de enorme voorraad leerboeken volgt hier eerst een selektie waarin de elektrostatika op het niveau van dit kollege te vinden is (prijzen van dit ogenblik):

Alonso, M. and Finn, E.J.: Fundamentele natuurkunde, deel 2: Elektromagnetisme, hfdst. 1 en 3, Agon-Elsevier, 1972, *f* 32,50.

Duckworth, H.E.: Electricity and magnetism, Ch. 1 t/m 4, Holt, Rinehartand Winston, 1960, $ 13.00.

Duffin, W.J.: Electricity and magnetism, Ch. 1 t/m 5 en 13, McGraw-Hill, 1965 (nieuwe druk op komst).

Feynman, R.P., e.a.: Lectures on physics, vol. 2, Ch. 1 t/m 12, Addison-Wesley, 1964, £ 3.45.

Purcell, E.M.: Electricity and magnetism, Berkeley Physics Course, vol. II, Ch. 1, 2, 3 en 9, McGraw-Hill, 1965, £ 2.20.

Reitz, J.R. and Milford, F.J.: Foundations of electromagnetic theory, 2nd ed., Ch. 1 t/m 6, Addison-Wesley, 1967, £ 3.45.

Voor wie eens wat meer wil:

Becker, R. und Sauter, F.: Theorie der Elektrizität, Teubner, Stuttgart Moderne bewerking van een klassiek boek, theoretisch georiënteerd. Deel I geeft het makroskopische elektromagnetisme en relativiteitstheorie (19. Aufl., 1969, DM 36,-)

Bleaney, B.J. and Bleaney, B.: Electricity and magnetism, 2nd ed., Oxford U.P., 1965, £ 3.75.
Een uitstekend boek, dat veel meer geeft dan het kollege, ook voor experimentele fysici (o.a. over fluktuaties, halfgeleiders, het magnetisme, magnetische resonantie, golfpijpen en trilholten). Voor wat het in 750 blz. biedt ook niet duur.

Duffin, W.J.: Advanced electricity and magnetism, McGraw-Hill, 1968, £ 3.00. Kompakte herhaling van het bovengenoemde boek van dezelfde auteur met theoretische en experimentele uitbreidingen.

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

FEBRUARI 1973

WERKKOLLEGE ELEKTROSTATIKA

Basisnatuurkunde 1e jaar

elementaire lading	$e = 1{,}602.10^{-19}$ C
elektronmassa	$m_e = 9{,}110.10^{-31}$ kg
protonmassa	$m_p = 1{,}673.10^{-27}$ kg
atomaire massa-eenheid	$ame = 1{,}661.10^{-27}$ kg
konstante van Boltzmann	$k = 1{,}381.10^{-23}$ JK^{-}
straal 1e Bohr-baan	$a_o = 5{,}292.10^{-11}$ m
konstante van Avogadro	$N_A = 6{,}022.10^{23}$ mol^{-}

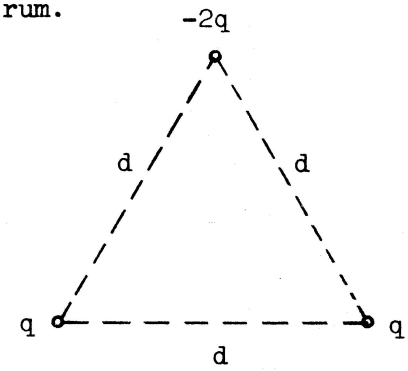
$$\varepsilon_o = 8{,}854.10^{-12} \text{ F/m} \simeq 9.10^{-12} \text{ F/m}$$

$$1/4\pi\varepsilon_o = 8{,}988.10^{9} \text{ m/F} \simeq 9.10^{9} \text{ m/F}$$

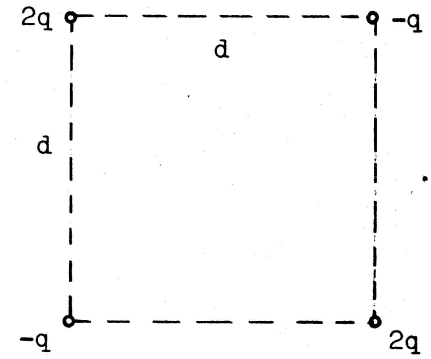
$$\pi = 3{,}14159 \simeq 22/7 \simeq 25/8$$

$$\pi^2 = 9{,}86960 \simeq 10$$

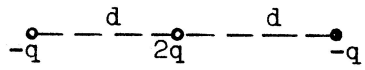
1. Hieronder zijn 5 ladingsverdelingen getekend, $q > 0$.
   Bepaal van elk het dipoolmoment $\vec{p}$, eventueel ten opzichte van het symmetriecentrum.



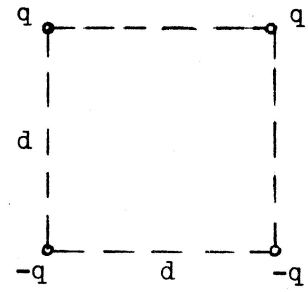
(a)



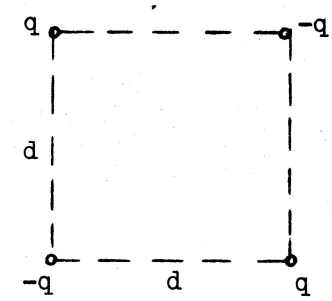
(b)



(c)



(d)



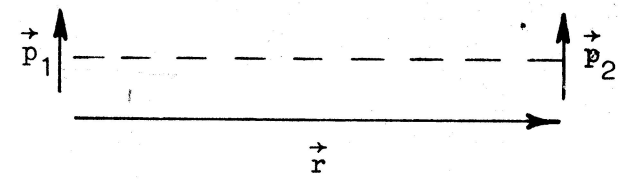
(e)

Hoe is in elk van deze gevallen het karakter van het elektrische veld op grote afstand?
Kies bij elke ladingsverdeling een z-as door het geometrische middelpunt en loodrecht op het papier. Bepaal de <u>richting</u> van $\vec{E}$ in punten van die as (gebruik zonodig symmetrie) en bepaal E indien $|z| >> d$.

2. a) Uit spektroskopische gegevens wordt in de molekuulfysika afgeleid dat de afstand tussen chloorkern en waterstofkern in een HCl-molekuul 1,28 Å is.
   Welke waarde zou hieruit volgen voor het <u>dipoolmoment van HCl</u> indien we zo'n molekuul zouden opvatten als een proton tegenover een bolsymmetrische negatieve ladingsverdeling rondom de Cl-kern?
   Uit metingen van de diëlektrische konstante van HCl-gas volgt $p = 3{,}43.10^{-30}$ Cm.
   Kunt u het verschil toelichten?
   Waar liggen in het molekuul de zwaartepunten van + lading en - lading?

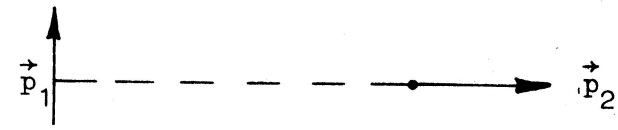
b) In een waterige oplossing worden ionen gehydrateerd. Stel dat een eenwaardig ion op een afstand van 1,5 Å aan een watermolekuul "gebonden" is.
Welke <u>energie is nodig</u> om ze te scheiden (berekenen in eV)?
Het molekulaire dipoolmoment van water te stellen op $6{,}2.10^{-30}$ Cm.

3. a) In het diktaat (blz. 8-9) is voor nevenstaande situatie de kracht op $\vec{p}_2$ afgeleid uit de energie W van $\vec{p}_2$ in het veld van $\vec{p}_1$.



Verifieer de uitdrukking voor W door de arbeid te berekenen, nodig om $\vec{p}_2$ door parallele verschuiving vanuit het oneindige naar zijn plaats te brengen.
Doe het ook door $\vec{p}_2$ vanuit het oneindige "arbeidsloos" naar $\vec{r}$ te brengen en vervolgens in het gelid te draaien.
Bereken tenslotte W uit de potentialen ter plaatse van kop en staart van $\vec{p}_2$.

b) Bepaal voor nevenstaande situatie de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ op $\vec{p}_1$ en $\vec{p}_2$ en ook de koppels $\vec{K}_1$ en $\vec{K}_2$.



Is $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$?
Is $\vec{K}_1 + \vec{K}_2 = \vec{0}$?

4. Op afstand r van een zeer lange ladingsrechte met uniforme ladingsdichtheid λ staat een dipool $\vec{p}$.
Bepaal de energie W van de dipool, de kracht $\vec{F}$ en het moment $\vec{K}$ van het koppel op de dipool:

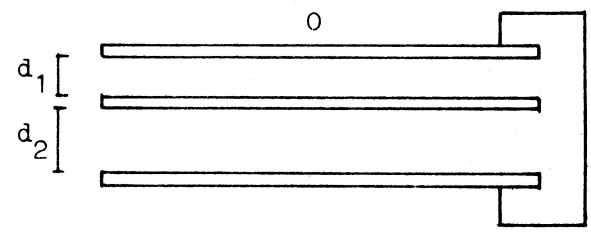
- als $\vec{p}$ evenwijdig aan de ladingsrechte is;
- als $\vec{p}$ de richting van $\vec{E}$ heeft;
- als $\vec{p}$ loodrecht op $\vec{E}$ en loodrecht op de rechte staat.

5. a) De lading op een geleider koncentreert zich vooral bij puntige uitsteeksels, algemeen is de ladingsdichtheid relatief groot daar waar de kromming van het oppervlak groot is (waarneembaar bij de zgn. corona-ontlading in lucht). Probeer dit te verklaren.

b) In een hal moet een hoogspanningsinstallatie aangebracht worden met een grote metalen bol, straal R_1. Beschouw de hal als een metalen, geaarde bol met straal R_2 = 8 m, koncentrisch met de eerste bol. De doorslagveldsterkte van droge lucht is $E_D = 3.10^6$ V/m. Wat is de maximaal toelaatbare potentiaal van de bol bij gegeven R_1? Hoe groot moet R_1 gekozen worden om deze toelaatbare potentiaal zo groot mogelijk te krijgen en hoe groot is deze grootste potentiaal?

c) Ook in vakuum is er een grens aan de veldsterkte bij het oppervlak van een geleider: bij ongeveer 10^9 V/m treedt emissie van elektronen op (veldemissie of koude emissie; een toepassing is het veldelektronenmikroskoop en hetveldionenmikroskoop voor het onderzoek van metaalstrukturen, zie bijv. Feynman II, blz. 6-14).
Vergelijk dit veld met het veld waarin een elektron in een H-atoom beweegt.
Bereken de dichtheid σ van oppervlaktelading bij deze veldsterkte en (voor $\sigma < 0$) het aantal elektronen per eenheid van oppervlak. Maak ter vergelijking een schatting van het aantal atomen per eenheid van oppervlak (denk bijv. aan een kubisch rooster).

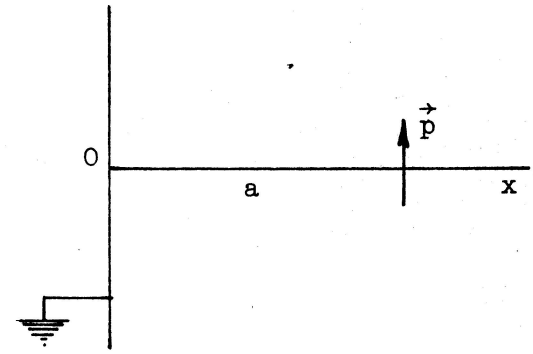
6. a) De drie grote geleidende platen uit de figuur zijn aanvankelijk ongeladen. De middelste krijgt een lading Q.
Bepaal de ladingsverdeling op de 3 platen en de potentiaalverschillen. Als $d_2 > d_1$ ondervindt de middelste plaat dan een netto kracht?



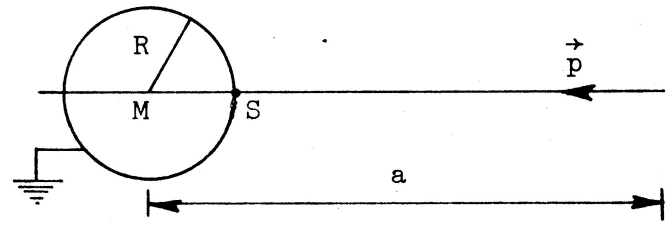
b) Herhaal dit probleem voor het geval dat de twee buitenste platen <u>niet</u> geleidend verbonden zijn. De oplossing is veel eenvoudiger!

c) Naar het schijnt kan de situatie uit b) verkregen worden uit die in a) door de verbindingsdraad weg te nemen zodra de ladingsverdeling bij a) zich heeft ingesteld.
Is de verdeling dus toch niet uniek of hebben we een fout gemaakt?
Wat gebeurt als we uitgaan van b) en vervolgens de verbindingsdraad aanbrengen?
Kunt u a priori zeggen welke van de twee verdelingen de grootste energie heeft?

7. Tegenover een grote, vlakke, geaarde geleider staat een dipool $\vec{p}$ evenwijdig aan de geleider op afstand a.
Hoe kan het elektrische veld in het gebied $x > 0$ bepaald worden? Waarom?
Bepaal de kracht $\vec{F}$ op de dipool.
Hoe groot is de totale influentie-lading?
Waar is $\sigma = 0$ (gebruik bij voorkeur symmetrie-overwegingen)?
Kies de y-as door O evenwijdig aan $\vec{p}$. Voor $|y| \gg a$ zal in punten van de y-as $\sigma \simeq \alpha y^n$. Wat is n? (bij narekenen: $\alpha = \pm\, 3pa/2\pi$).



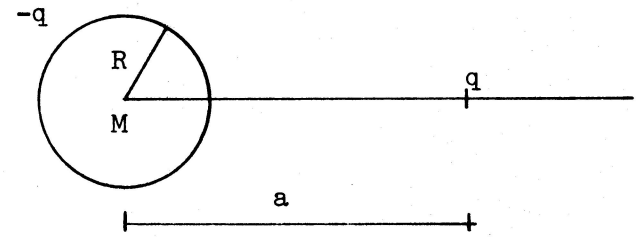
8. Een dipool $\vec{p}$ staat in vakuum op afstand a van het centrum M van een geaarde metalen bol met straal R (a > R) waarbij $\vec{p}$ naar M wijst.



Door welk systeem van ladingen en beeldladingen is het veld buiten de bol bepaald? Aanwijzing: beantwoord deze vraag eerst voor een eindige tweepool en neem dan de dipool-limiet.

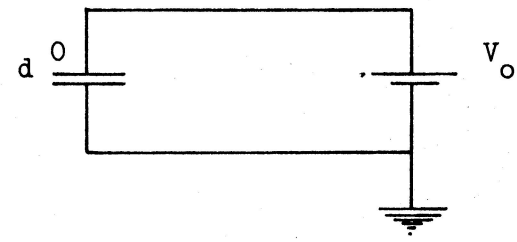
Hoe groot is de totale influentie-lading op de bol? Bepaal σ in punt S.
Werkt er een kracht op de dipool? Een koppel?
Hoe is het karakter van het veld op grote afstand van de bol ($r \gg a$)?

9. Een puntlading $q > o$ staat in vakuum op afstand a van het centrum M van een geïsoleerde metalen bol, die een lading $-q$ draagt ($a > R$).



Hoe groot is de potentiaal van de bol (t.o.v. oneindig)?
Bepaal $\vec{E}$ op de halve rechte door M en de puntlading voor $r > a$.
Leid hieruit af hoe $\vec{E}$ in goede benadering wordt voor $r >> a$ op deze rechte
Kontroleer vervolgens het antwoord uit de multipoolontwikkeling.

10. a) Een vlakke-plaat-kondensator is geschakeld als hiernaast getekend, de plaatafstand d is $<< \sqrt{O}$.



Men schuift een geïsoleerde metalen plaat, dikte a, tussen de twee platen en evenwijdig daaraan.
Zal er lading naar of van de kondensator stromen? Zo ja, hoeveel?
Bereken de potentiaal van deze plaat indien $a << d$ en de plaat op afstand d_1 van de onderste kondensatorplaat is.

b) De geïsoleerde plaat wordt weer weggenomen.
Hoe groot is de kracht tussen de twee kondensatorplaten, uitgedrukt in V_o, O en d?
De plaatafstand wordt nu verdubbeld. Is de kracht daarna nog dezelfde?
Randeffekten voor en na verwaarlozen.
Verifieer dat er bij dit proces behoud van energie is.

c) Dezelfde vragen als in b) indien de plaatafstand verdubbeld wordt <u>nadat</u> de verbinding met de spanningsbron verbroken is.

11. Kondensator C_1 met spanning V_1 wordt parrallel geschakeld met kondensator C_2 met spanning V_2 en wel
   a) gelijknamige polen aan elkaar
   b) ongelijknamige polen aan elkaar.

Bepaal voor beide gevallen de uiteindelijke spanning V
Tussen welke grenzen ligt V?
Hoeveel elektrostatische energie is in geval a) verloren gegaan?
Wat is daarmee gebeurd? Denk ook aan de mogelijkheid van verbindingsdraden met uiterst kleine weerstand.

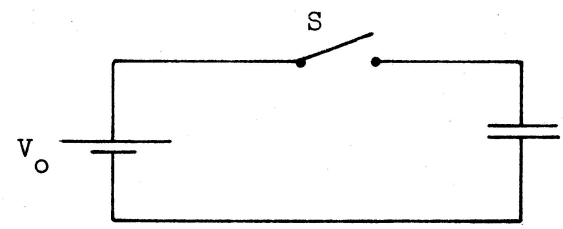
12. Maak een redelijke schatting van de volgende kapaciteiten:

a) de maximale kapaciteit van een draaikondensator in lucht met in totaal 31 platen; de buitenste platen zijn 2 cm van elkaar verwijderd, het oppervlak van elke plaat is 500 mm^2;

b) een opgerolde kondensator van stroken blad-tin (2 cm x 50 cm) waartussen poly-ethyleen band (dik 0,02 mm, $\varepsilon_r = 2{,}3$); wat is de doorslagspanning als de doorslagveldsterkte van poly-ethyleen 17 kV/mm is?

c) een hol cilindrisch buisje van keramisch materiaal (lang 2 cm, uitwendige diameter 2 mm, wanddikte 0,5 mm), waarbij aan binnen- en buitenzijde een laagje metaal opgedampt is; $\varepsilon_r = 6$.

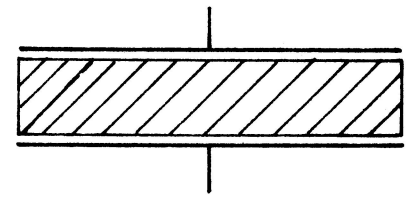
13. De getekende schakeling bevat een ideale vlakke kondensator in vakuum. Schakelaar S wordt gesloten. De kapaciteit is C_o, de lading Q_o, de kracht tussen de platen F_o en de energie W_o.



a) Terwijl S gesloten blijft wordt de ruimte tussen de platen geheel gevuld met een diëlektrikum met diëlektrische konstante ε_r.
Wat worden de spanning, kapaciteit, lading, kracht tussen de platen en de energie?
Hoeveel energie levert de spanningsbron?
Vergelijk dit met de toename van de kondensatorenergie.

b) Vanuit de begintoestand wordt <u>eerst</u> S geopend en dan de kondensator gevuld. Wat worden dan de spanning, kapaciteit, lading, kracht en energie?

c) Stel dat bij b) het diëlektrikum de ruimte niet helemaal vult maar dat tussen diëlektrikum en platen smalle spleten blijven.
Wat worden dan de kapaciteit en de kracht?



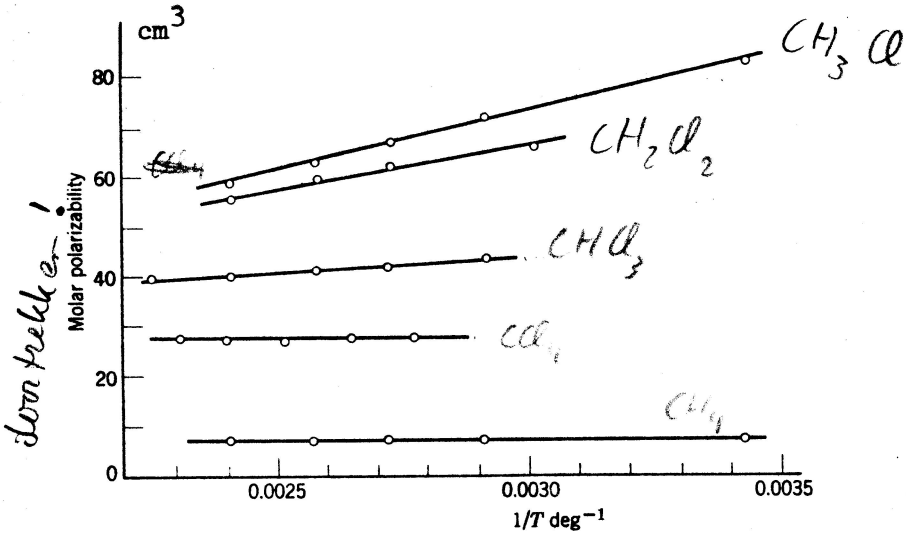
14. Een lange cilinderkondensator heeft een binnen- en een buitengeleider met diameters $2R_1$ en $2R_2$ en een spanning V, het diëlektrikum heeft een diëlektrische konstante ε_r.

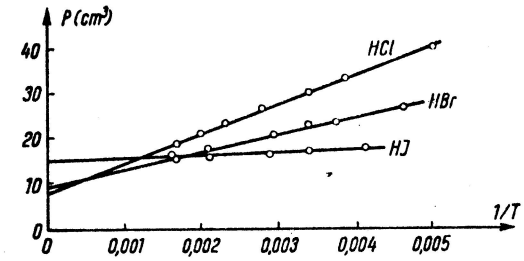
a) Bereken de energie per lengte-eenheid. Doe het zowel via de kapaciteit als door bepaling van de veldenergie.

b) R_2 = 1 cm, de doorslagveldsterkte van het diëlektrikum is 50 kV/mm en ε_r = 2,5.
Hoe moet R_1 gekozen worden om de toelaatbare spanning maximaal te krijgen en hoe groot is dat maximum?
En hoe zou R_1 gekozen moeten worden om de energie per lengte-eenheid maximaal te krijgen?

15. a) <u>Atomaire polariseerbaarheid</u>.
Neem als atoom-model een puntvormige kern met lading Ze omgeven door een negatieve ruimtelading -Ze homogeen verdeeld over een bol met straal R. Neem aan dat in een uitwendig elektrisch veld $\vec{e}$ de negatieve lading homogeen bolvormig blijft maar dat het middelpunt t.o.v. de kern verschoven wordt over een afstand $\vec{d}$.
Bepaal $\vec{d}$ uit een evenwichtsvoorwaarde en daaruit de polariseerbaarheid α.
Vergelijk het resultaat met dat van het Mossotti-model (diktaat §10).
Ga voor realistische waarden na dat d << R. Neem R = Bohr-straal, $|\vec{e}|$= doorslagveldsterkte van droge lucht.
Hoe groot zou voor deze waarden het geïnduceerde dipoolmoment ongeveer zijn van een H-atoom?
Vergelijk de uitkomst met permanente dipoolmomenten (orde van grootte 1 debije).

b) Gebruik bovenstaande om een <u>schatting</u> te maken van de diëlektrische konstante van helium bij 0° C en 1 atm. Neem voor R weer de Bohr-straal.
Het molair volume van een ideaal gas bij 0° C en 1 atm. is $2{,}24.10^{-2} m^3 mol^{-1}$.
De <u>gemeten</u> waarde bij die temperatuur en druk is, 1,000074.
Bereken hieruit het geïnduceerde dipoolmoment van een He-atoom in een veld van 10^4 V/m.





16. Hierboven zijn een aantal metingen weergegeven van de zgn. molaire polariseerbaarheid Π als funktie van 1/T voor een aantal verbindingen. Ter verduidelijking: Π is gedefinieerd als

$$\Pi = v_m \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

waarin v_m het molaire volume is bij de gegeven temperatuur en druk. Indien (62) in het diktaat als uitdrukking voor ε_r bruikbaar is zal

$$\Pi = \frac{1}{3} N_A(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_o kT})$$

waarin N_A = konstante van Avogadro. Het verschil tussen deze vorm en (62) is dat nu de deeltjesdichtheid n (die van druk en temperatuur afhangt) vervangen is door N_A (molair!).
Π heeft de dimensie van een volume.

a) Het linker plaatje geeft meetpunten van CCl_4, CH_3Cl, CH_2Cl_2, $CHCl_3$ en CH_4. Welke meetpunten horen bij deze verbindingen? Welke verbinding heeft het grootste dipoolmoment?
Bepaal de molekulaire polariseerbaarheid van CH_4 en daaruit een schatting van de lineaire afmetingen van dit molekuul.
Bepaal ook het dipoolmoment van CH_3Cl.

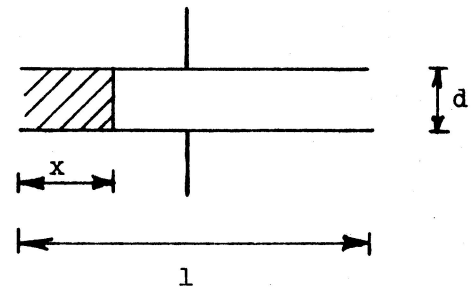
b) Rechterplaatje: welke van de 3 verbindingen heeft het grootste dipoolmoment? De grootste molekulaire polariseerbaarheid?

17. Tussen de platen van een vlakke kondensator is een diëlektrikum geplaatst met $\varepsilon_r = 3$. Het elektrische veld is daar 10^5 V/m.

Bereken:

- permittiviteit en susceptibiliteit van het medium;
- de doorschuiving in het medium;
- de ladingsdichtheid op de platen;
- de polarisatie in het medium;
- de dichtheid van polarisatielading aan de grensvlakken;
- het aandeel in de veldsterkte, afkomstig van de vrije ladingen en het aandeel, ontstaan als tegenveld van de dipolen;
- D en E in evt. smalle vakuumspleten tussen medium en platen.

18. Een geladen vlakke kondensator met vierkante platen is gedeeltelijk gevuld met een diëlektrikum (ε_r) dat de ruimte tussen de platen geheel vult over een rechthoek met zijden x en l.



a) Bepaal de kapaciteit C.

b) Hoe groot zijn de verhoudingen (d = diël., v = vakuum)
E_d/E_v, D_d/D_v, σ_d/σ_v, w_d/w_v, f_d/f_v (f is de kracht op de plaat per eenheid van opp.).

c) Bereken de kracht waarmee het diëlektrikum tussen de platen getrokken wordt (beschouw de energie-verandering ΔW als x met Δx toeneemt, let op wat daarbij konstant is).

19. Bij "gewone" diëlektrika wordt de polarisatie teweeg gebracht door een uitwendig elektrisch veld. Er bestaan ook <u>ferro-elektrika</u>, stoffen die <u>zonder</u> uitwendig veld een permanente polarisatie $\vec{P}$ kunnen hebben. Hiertoe behoren een aantal kristallijne stoffen en ook sommige organische dipoolstoffen (was- en harssoorten) waaruit men "elektreten" kan maken, analoog aan magneten: de stof wordt in vloeibare toestand in een elektrisch veld gebracht en na snelle afkoeling blijven de "ingevroren" dipoolmomenten ook zonder uitwendig veld gericht.

Stel dat we een bolvormige elektreet hebben met homogene polarisatie $\vec{P}$.

Geef aan hoe het veld $\vec{E}$ is binnen en buiten de bol. Leid daaruit weer het veld $\vec{D}$ af.
Ga na of aan het boloppervlak voldaan is aan de grensvoorwaarden (56) en (57).
Laat ook zien dat voor zo'n elektreet zeker niet de gebruikelijke relatie $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ kan gelden, zij worden niet door een ε_r gekarakteriseerd (ferro-elektrika vertonen hysterese).

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

T73-10

TENTAMEN WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB EN ELEKTROSTATIKA

8 maart 1973

1. Op een hoogte h boven het aardoppervlak wordt een kunstmaan met massa m in een baan om de aarde gebracht. Zijn beginsnelheid $\vec{v}_o$ staat loodrecht op de voerstraal naar het middelpunt van de aarde. De lengte van deze voerstraal is $r_o = R + h$ waarbij R de straal van de bolvormig veronderstelde aarde is. De versnelling van de vrije val aan het oppervlak van de aarde is g; effekten t.g.v. de rotatie van de aarde mogen worden verwaarloosd.

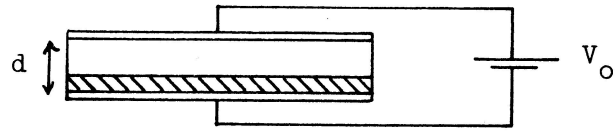
   a) Bereken de waarde van v_o waarvoor de kunstmaan een cirkelbaan beschrijft. $\sqrt{\frac{gm}{r_o}}$

   b) Druk voor het geval van de cirkelbaan de totale energie E_{t1} en het impulsmoment L_1 uit in m, g, R en h. $m(R+h)\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$ $-\frac{1}{2}\frac{gR^2h}{R+h}$

   c) Beschouw nu de situatie waarbij de kunstmaan in hetzelfde punt als hierboven met een snelheid $\vec{v} = \alpha\vec{v}_o$ in zijn baan wordt gebracht. Voor welke waarden van α beschrijft de kunstmaan een open baan, d.w.z. een parabool of hyperbool? $\alpha \geq \frac{2}{r_o v^2 m}$ $(\leq -)$

   d) Druk voor het geval dat een gesloten baan beschreven wordt de totale energie E_{t2}, het impulsmoment L_2 en de halve grote as van de ellipsbaan uit in de grootheden m, g, R, h en α. $L - \alpha r$

2. Een cylindrische doos heeft een metalen deksel en bodem, de mantel is van isolerend materiaal. Het oppervlak van deksel en bodem is O, de afstand ertussen is d en d is zo klein t.o.v. de diameter van de doos dat randeffekten verwaarloosbaar zijn.

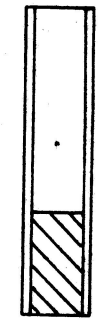


De doos wordt in horizontale stand voor 1/3 deel gevuld met een vloeistof waarvan de diëlektrische konstante ε_r is en aangesloten op een spanningsbron V_o.

   a) Bepaal de kapaciteit C van de doos in deze situatie.
   Hoe groot zijn de verhoudingen D_v/D_d en E_v/E_d? ε_r
   (D_v = waarde in vakuum-deel, D_d = waarde in diëlektrikum, etc.)

z.o.z.

b) De verbinding met de spanningsbron wordt verbroken en de doos wordt een kwartslag gedraaid tot vertikale stand.



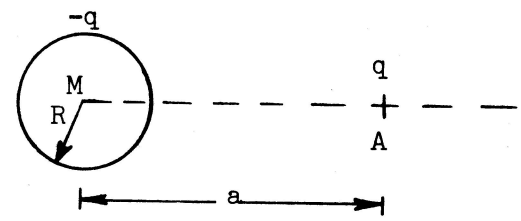
Als C' de kapaciteit is in deze stand, druk dan C'/C uit in ε_r. Bereken vervolgens deze verhouding als $\varepsilon_r = 4$.

c) Zij $V_o = 75$ volt, $d = 4$ mm, $\varepsilon_r = 4$ en $\varepsilon_o = 9.10^{-12}$ F/m.

Bereken voor de vertikale stand (geval b):

- het potentiaalverschil tussen deksel en bodem;
- de ladingsdichtheid op het metaal, zowel in het deel dat aan de vloeistof grenst als in het overige deel.

3. Een puntlading $q > o$ staat in vakuum in A op afstand a van het middelpunt M van een geïsoleerde metalen bol met straal R die een lading $-q$ draagt. Hierbij is $a > R$.



a) Met welk stelsel puntladingen kan het elektrische veld buiten de bol exakt beschreven worden? Hoe groot is de potentiaal van de bol?

b) Met M als oorsprong beschouwen we de radiële komponent E_r van de elektrische veldsterkte in punten op het verlengde van MA dus voor $r > a$. Als we hiervoor schrijven:

$$E_r = \alpha + \frac{\beta}{r} + \frac{\gamma}{r^2} + \frac{\delta}{r^3} + \ldots.$$

welke is dan de eerste term in deze reeks die van nul verschilt?

Bepaal de 4 konstanten α, β, γ en δ.

OPLOSSINGEN TENTAMEN WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB/ELEKTROSTATIKA 8 maart 1973

1. a) $\frac{mv_o^2}{r_o} = mg(\frac{R}{r_o})^2$, dus $v_o = R\sqrt{\frac{g}{r_o}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$.

b) $E_{t1} = \frac{1}{2} E_p = -\frac{\gamma}{2r_o} = -\frac{GmM}{2r_o}$; $GM = gR^2$ dus $E_t = -\frac{mgR^2}{2r_o} = \frac{-mgR^2}{2(R+h)}$

$L_1 = mv_o r_o = mRr_o\sqrt{\frac{g}{r_o}} = mR\sqrt{gr_o} = mR\sqrt{g(R+h)}$

c) $E_t = -\frac{\gamma}{r_o} + \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{\gamma}{r_o} + \frac{1}{2}mv_o^2 \cdot \alpha^2$ en $\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{\gamma}{2r_o}$ dus $E_t = \frac{\gamma}{r_o}(\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)$

voor open banen is $E_t \geqq o$ dus $\alpha \geqq \sqrt{2}$. of $\alpha \leqq -\sqrt{2}$

d) $E_{t2} = \frac{\gamma}{r_o}(\frac{1}{2}\alpha^2 - 1) = \frac{mgR^2}{R+h}(1 - \frac{1}{2}\alpha^2)$. E_{t2} hangt alleen van de lange as van de ellips af volgens $E_{t2} = -\frac{\gamma}{2a}$. Hieruit volgt

$a = \frac{r_o}{2-\alpha^2} = \frac{R+h}{2-\alpha^2}$.

$L_2 = m\alpha v_o r_o = \alpha L_1 = \alpha mR\sqrt{g(R+h)}$.

2. a) Als serieschakeling:

$C_1 = \varepsilon_o O/\frac{2}{3}d$ en $C_2 = \varepsilon_r\varepsilon_o O/\frac{1}{3}d$

dus $C = (C_1^{-1} + C_2^{-1})^{-1} = \underline{\underline{3\varepsilon_r\varepsilon_o O/d(2\varepsilon_r + 1)}}$

of direkt als verhouding $C = Q/V_o$:

Is Q de lading, dan is $D = \sigma = Q/O$ in de hele kondensator.

Dus is $E_{vak} = Q/\varepsilon_o O$ en $E_{diël} = Q/\varepsilon_r\varepsilon_o O$

dus $V_o = \frac{2}{3}Qd/\varepsilon_o O + \frac{1}{3}Qd/\varepsilon_r\varepsilon_o O = Q/C$

dus $C = \underline{\underline{3\varepsilon_r\varepsilon_o O/d(2\varepsilon_r + 1)}}$

$D_v/D_d = \underline{\underline{1}}$ en $E_v/E_d = \underline{\underline{\varepsilon_r}}$

b) Omdat het volume van de vloeistof niet verandert, is het oppervlak O_1 van de platen, dat aan vloeistof grenst $\frac{1}{3}O$.

Als parallelschakeling:

$C_1' = \frac{1}{3}\varepsilon_r\varepsilon_o\, O/d$ en $C_2' = \frac{2}{3}\varepsilon_o\, O/d$

dus $C' = C_1' + C_2' = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + 2)\varepsilon_o\, O/d$

dus $C'/C = \underline{\underline{\dfrac{(2\,\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r + 2)}{9\,\varepsilon_r}}}$ en $= \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ als $\varepsilon_r = 4$

Of ook: overal is $E = V'/d$ dus $\sigma_v = D_v = \varepsilon_o\, V'/d$ en

$\sigma_d = D_d = \varepsilon_r\varepsilon_o\, V'/d$ dus is $Q = \frac{2}{3}\, O\, \sigma_v + \frac{1}{3}\, O\, \sigma_d =$

$= \frac{1}{3}(\varepsilon_r + 2)\, \varepsilon_o\, O\, V'/d$ zodat $C' = \underline{\underline{\frac{1}{3}(\varepsilon_r + 2)\varepsilon_o\, O/d}}$

c) $V' = Q/C' = CV_o/C' = \frac{2}{3}V_o = \underline{\underline{50 \text{ volt}}}$

vakuumdeel: $\sigma_v = D_v = \varepsilon_o E_v = \varepsilon_o\, V'/d = 9.10^{-12}.\ 50/4.10^{-3}\ C/m^2 =$

$= \underline{\underline{1{,}125.10^{-7}\ C/m^2}}$

diëlektrikum: $\sigma_d = \varepsilon_r\sigma_v = \underline{\underline{4{,}5.10^{-7}\ C/m^2}}$

3. a) 1) puntlading q in A

2) " $q' = -\frac{R}{a}q$ in beeldpunt A' op afstand $a' = \frac{R^2}{a}$ van M

3) " $-q - q' = -(1 - \frac{R}{a})q$ in M

1) en 2) geven samen een potentiaal nul op de bol, dus

$$V_{bol} = \frac{-q - q'}{4\pi\varepsilon_o R} = \underline{\underline{-\frac{a - R}{aR}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}}}$$

b) Totale lading van het systeem is nul. Het dipoolmoment (neem bijv. M als oorsprong) is

$$p = aq - \frac{R^2}{a}\frac{R}{a}q = \underline{\underline{(1 - \frac{R^3}{a^3})aq}} \quad (\vec{p} \text{ gericht van M naar A})$$

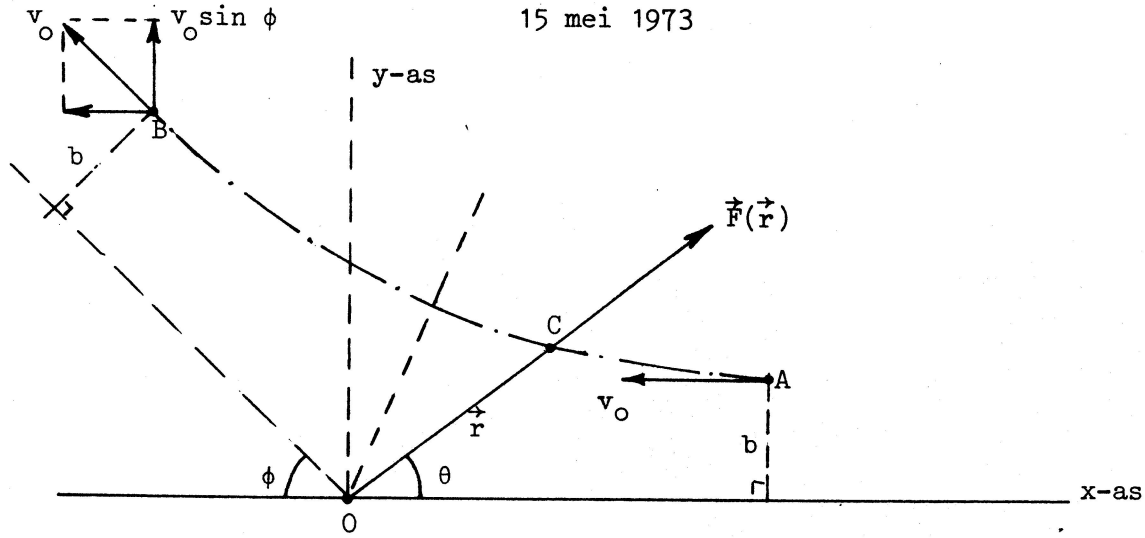
Dus is $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Op verlengde van MA is $\vec{E} = \dfrac{\vec{p}}{2\pi\varepsilon_o r^3}$ dus

$E_r = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_o r^3}$ en $\delta = \dfrac{p}{2\pi\varepsilon_o} = \underline{\underline{(1 - \frac{R^3}{a^3})\,\frac{aq}{2\pi\varepsilon_o}}}$

HERHALINGSTENTAMEN WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB EN ELEKTROSTATIKA

15 mei 1973

1.



Een deeltje met massa m bevindt zich op zeker moment in punt A en heeft een snelheid v_o evenwijdig aan de x-as. In de oorsprong O is een krachtcentrum aanwezig dat op het deeltje m een centrale afstotende kracht uitoefent die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{k}{r^2}\,\vec{e}_r \ .$$

De afstand b van het punt A tot de x-as is de zg. botsingsparameter. Het deeltje wordt "verstrooid" door het krachtcentrum in O en is na enige tijd in het punt B aangekomen waar het wederom de snelheid ter waarde v_o heeft. De richting van de snelheid in het punt B maakt een hoek ϕ met de negatieve x-as. Deze hoek wordt de verstrooingshoek genoemd.

a. Welke behoudswetten gelden voor de beweging van het deeltje? Motiveer Uw antwoorden.

b. Formuleer de bewegingsvergelijking. Aanwijzing: U kunt volstaan met het verband aan te geven tussen de y-component van de snelheid v_y in een willekeurig punt C van de baan en de y-component van de kracht in dit punt.

c. Geef het verband tussen $\dot{v}_y$ en $\dot{\theta}$ door eliminatie van r uit deze bewegingsvergelijking en de wet van behoud van impulsmoment.

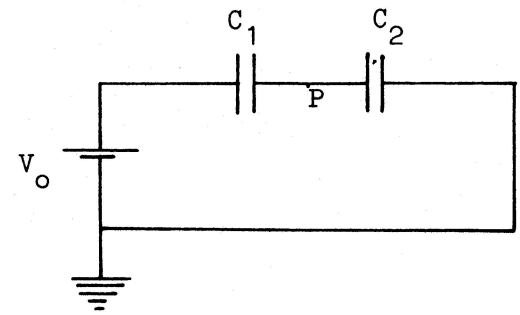
d. Bereken tenslotte ϕ door het onder c. gevonden verband te integreren waarbij v_y als grenzen heeft 0 in het punt A en $_0 \sin \phi$ in het punt B en θ als grenzen $\theta = 0$ in het punt A en $\theta = \pi - \phi$ in het punt B. Dit laatste is een benadering voor het geval de punten A en B zich op grote afstand van O bevinden.

2. Een lange cilinderkondensator heeft een binnen- en een buitengeleider met diameters resp. 2a en 2b, het diëlektrikum heeft een diëlektrische konstante ε_r en de kondensator heeft een spanning V.

a. Bepaal de elektrische energie per lengte-eenheid (lengte 1 in de as-richting).

b. b = 1 cm, ε_r = 2,5 en de doorslagveldsterkte van het diëlektrikum is 50 kV/mm.
Hoe groot moet a gekozen worden om de toelaatbare <u>spanning</u> maximaal te krijgen en hoe groot is dat maximum?
En hoe groot moet a gekozen worden om de <u>energie</u> per lengte-eenheid maximaal te krijgen?

3. Twee in serie geschakelde vakuumkondensatoren C_1 en C_2 zijn aangesloten op een bron met spanning V_o = 12 volt.
C_1 = 0,5 μF en $C_2 = 4C_1$.



De -pool van de bron is geaard.

a. Bereken de potentiaal in een punt P van de verbindingsdraad van de kondensatoren.

b. In dezelfde schakeling wordt C_2 ondergedompeld in benzeen C_6H_6, waarvan de diëlektrische konstante 2,25 is.

Bereken:

- de potentiaal in P;
- de toename of afname van de kondensatorladingen;
- het dipoolmoment van een molekuul benzeen in dat deel van kondensator C_2 waar het elektrische veld homogeen is als gegeven is dat de kondensatorplaten van C_2 1mm van elkaar verwijderd zijn.

Z.O.Z.

Gegeven: $\varepsilon_0 \approx 9.10^{-12}$ F/m

benzeen is geen dipoolstof en heeft een dichtheid van 897 kg/m^3.

Konstante van Avogadro 6,0 . 10^{26} kmol^{-1}.

Molekuulmassa van benzeen is 78 a.m.e. $16 \cdot 10^{-32}$